

Marches aléatoires sur les groupes affines
de l'arbre et de la droite réelle et
processus localement contractifs

Sara Brofferio

Table des matières

Introduction	5
partie 1. Marches aléatoires sur le groupe affine d'un arbre homogène	9
Chapitre 1. Préliminaires	11
1.1. L'arbre orienté	11
1.2. Le groupe des affinités de l'arbre	12
1.3. Exemples de sous-groupes de $\text{Aff}(\mathbb{T})$	17
1.4. Les marches aléatoires sur $\text{Aff}(\mathbb{T})$	21
Chapitre 2. Chaîne de Markov induite sur le bord $\partial^*\mathbb{T}$	25
2.1. Le cas de drift non nul	26
2.2. Le cas de drift nul	28
Chapitre 3. Renouvellement et frontière de Martin	37
3.1. Mesures limites du noyau potentiel	39
3.2. Mesures limites du noyau de Martin	54
3.3. Mesure bi-invariante	57
Chapitre 4. Théorème limite local	59
4.1. Un théorème limite local pour les groupes non-unimodulaires	60
4.2. Le cas des affinités d'un arbre	67
4.3. Un théorème limite local précisé pour $\text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$ et $\text{Aff}(\mathbb{Z}_q)$	69
partie 2. Marches aléatoires sur le groupe affine réel et ses extensions multidimensionnelles	81
Chapitre 5. How a centered random walk on the affine group goes to infinity	83
5.1. Notations and hypotheses	85
5.2. Convergence to infinity	86
5.3. Local contraction	89
5.4. Divergence of the right projection	92
Chapitre 6. Stochastic locally contractive systems with speed	97
6.1. Local contraction speed	101

6.2. “Jordan blocks”	108
6.3. <i>NA</i> groups	115
6.4. Appendix : Decreasing random walk	121
Bibliographie	125

Introduction

La loi des grands nombres et le théorème central limite sont deux théorèmes fondamentaux des Probabilités qui donnent une première description du comportement asymptotique d'une somme de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, soit du processus S_n défini par récurrence par la formule

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1} \text{ où les } X_n \text{ sont des variables aléatoires réelles}$$

c'est-à-dire obtenu par l'itération de translations aléatoires sur \mathbb{R} . Plus généralement de nombreux problèmes (tels que le battage de cartes [AD86], l'étude de l'équation de récurrence sur \mathbb{R}^d

$$S_{n+1} = A_{n+1}S_n \text{ où les } A_n \text{ sont des matrices aléatoires}$$

qui intervient dans la modélisation de plusieurs phénomènes (par exemple dans l'équation de Schrödinger aléatoire [BL85], dans l'équation des ondes [Tut71] ou en démographie [Coh79]), la génération de nombres aléatoires [CDG87], les promenades aléatoires sur des graphes [Woe00] etc....) ont amené les probabilistes à s'intéresser aux processus aléatoires obtenus par itération de transformations aléatoires indépendantes. Lorsque les transformations envisagées forment un groupe, s'introduit naturellement la notion de *marche aléatoire sur un groupe*, dont l'étude théorique s'est développée depuis les années '60, aux États Unis [Kes59] [FK60], en URSS [Tut65] [DM61] et à partir des années '70 en France [GKR77]. On dispose maintenant d'une théorie très riche qui couvre à la fois des résultats sur des groupes généraux (groupes de Lie, groupes discrets) et des études pointues dans des cas remarquables. Elle a créé des liens étroits entre les Probabilités et d'autres branches des Mathématiques telles que la théorie du potentiel, la géométrie ou les systèmes dynamiques.

Cette thèse est dédiée à l'étude des marches aléatoires sur deux groupes particuliers : le groupe affine de l'arbre homogène, dont l'étude est relativement récente, et le groupe affine de la droite réelle, qui fait l'objet, au contraire, d'une littérature très vaste. Dans le premier cas nous affronterons quelques problématiques classiques, tandis que dans le deuxième nous nous intéresserons à des propriétés plus fines.

Il existe un rapport étroit entre les deux groupes considérés, principalement parce qu'il peuvent tous les deux être définis comme le groupe des isométries d'un espace hyperbolique (l'arbre homogène et le disque hyperbolique respectivement) qui fixent un point du bord de cet espace. Il s'agit de groupes moyennables et

non-unimodulaires qui présentent beaucoup de ressemblances du point de vue algébrique et métrique et leur approche simultanée s'est révélée riche de suggestions qui ont abouti à de nouveaux résultats dans les deux contextes. On va ici présenter brièvement la structure du mémoire ainsi que les principaux résultats, et on renvoie à chaque chapitre pour une introduction et une bibliographie plus complètes.

Première partie :

Marches aléatoires sur le groupe affine d'un arbre homogène

La première partie de la thèse est dédiée à l'étude des marches aléatoires sur des sous-groupes non-exceptionnels du groupe affine d'un arbre, $\text{Aff}(\mathbb{T})$, c'est-à-dire le groupe des isométries d'un arbre homogène qui en fixent une extrémité. Un exemple particulièrement intéressant parmi ces sous-groupes est constitué du groupe des transformations affines des nombres rationnels p -adiques $\text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$ qui peut être identifié, comme dans le cas réel, avec le groupe des matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, où a et b appartiennent à \mathbb{Q}_p .

Comme on l'a déjà remarqué, le groupe affine de l'arbre partage beaucoup de propriétés avec son analogue réel, mais il existe des différences notables. En effet, la structure de l'arbre est beaucoup moins rigide que celle du disque hyperbolique et les affinités de l'arbre peuvent opérer de façon très différente sur les diverses branches. En particulier, le groupe $\text{Aff}(\mathbb{T})$ ne peut pas être identifié, contrairement au cas réel, avec l'espace sur lequel il agit. Il est donc plus difficile de contrôler le comportement global et on voit apparaître de nouveaux phénomènes de non-commutativité. En outre, du point de vue topologique, $\text{Aff}(\mathbb{T})$ est un groupe localement compact non-dénombrable et totalement discontinu. Il constitue un exemple de groupe qui a été assez négligé en littérature, car il n'est ni un groupe discret ni un groupe de Lie, l'intérêt pour les groupes algébriques définis sur des corps locaux ne s'étant développé qu'assez récemment [Gui89] [GJT98, chapitre XV] [BCTFT01].

D.I. Cartwright, V.A. Kaĭmanovich et W. Woess ont fourni dans leur article *Random walks on the affine group of local fields and of homogeneous trees* [CKW94], une première étude détaillée des marches aléatoires sur $\text{Aff}(\mathbb{T})$, en obtenant, entre autres, des résultats de convergence vers le bord, des lois des grands nombres, un théorème central limite pour la norme ainsi que la détermination de la frontière de Poisson. On va s'intéresser à d'autres aspects et notre étude sera structurée de la façon suivante :

Chapitre 1. On introduit les notations, les principales hypothèses et les résultats préliminaires.

Chapitre 2. On étudie le comportement de la **chaîne de Markov induite sur le bord** de l'arbre, qui est l'équivalent dans le cas de l'arbre de la chaîne de Markov définie sur \mathbb{R} par l'application itérée d'affinités aléatoires. On détermine les conditions pour la récurrence ou la transience de cette chaîne, ainsi que

pour l'existence et l'unicité d'une mesure invariante, aussi bien dans le cas où l'action du groupe sur le bord est dilatante ou contractante en moyenne (Proposition 2.1.1) que dans le cas plus délicat on n'a pas de comportement privilégié (Proposition 2.2.2 et Théorème 2.2.7).

Chapitre 3. Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement à l'infini de la mesure potentiel. Dans une première partie on s'intéresse au **renouvellement**; on montre que lorsque on compactifie le groupe avec le bord de l'arbre on peut prolonger par continuité le noyau potentiel et on donne une forme explicite des mesures limites. (Théorèmes 3.1.9 et 3.1.11). Ensuite on s'occupe du noyau potentiel normalisé et on complète les résultats déjà connus sur la **frontière de Martin** (qui coïncide avec le bord de l'arbre) avec la caractérisation des mesures extrémales (Théorème 3.2.1) et en donnant une représentation intégrale des mesures invariantes. On montrera aussi l'existence et l'unicité d'une mesure de Radon simultanément μ -invariante à gauche et à droite (Proposition 3.3.1).

Chapitre 4. On conclut l'étude de ces marches aléatoires sur $\text{Aff}(\mathbb{T})$ avec un **Théorème limite local**, en montrant que le n -ième produit de convolution d'une mesure de probabilité se comporte comme $c(n)n^{-3/2}$, où $c(n)$ est une suite bornée et loin de zéro (Théorème 4.2.1). Dans le cas de $\text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$ on pourra montrer que $c(n)$ est constante (Théorème 4.3.1). On obtiendra aussi des résultats partiels valables pour des groupes non-unimodulaires plus généraux (Théorèmes 4.1.3 et 4.1.4).

Deuxième partie :

Marches aléatoires sur le groupe affine réel et ses extensions multidimensionnelles

Les marches aléatoires sur le groupe affine réel $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ ont été profondément étudiées à cause de leurs multiples intérêts. D'une part elles fournissent un modèle pour un grand nombre de phénomènes naturels ou économiques, et d'autre part, d'un point de vue théorique, elles donnent un premier exemple relativement maniable de groupe où la non-commutativité conduit à des résultats significativement nouveaux qui ont pu être ensuite généralisés aux groupes de Lie résolubles (voir par exemple [Kes73][Gri74][Éli82] et [GM00]).

Un rôle fondamental dans l'étude des marches aléatoires sur le groupe affine réel et dans leurs applications est joué par la chaîne de Markov induite sur \mathbb{R} par la marche aléatoire gauche. Ce processus, aussi appelé *modèle auto-régressif*, est défini par récurrence par

$$(0.0.1) \quad Y_n = a_n Y_{n-1} + b_n$$

où $\{(a_n, b_n)\}_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $\text{Aff}(\mathbb{R})$.

On regroupe dans cette partie deux articles sur les propriétés asymptotiques des trajectoires des marches aléatoires et sur les propriétés de contraction locale

du modèle auto-régressif dans le *cas critique* où le coefficient de dilatation a_n est centré.

Chapitre 5. *Comment une marche aléatoire centrée sur le groupe affine réel tend vers l'infini.* Le principal résultat de l'article est de montrer que dans le cas critique, la marche aléatoire droite sur le groupe affine converge vers le point du bord du disque hyperbolique fixé par les affinités (Théorème 5.2.1). On déduit de ce résultat une preuve simple de la propriété de contraction locale du modèle auto-régressif induit (la distance entre deux trajectoires qui partent de points différents converge vers zéro lorsque on regarde à travers une fenêtre compacte – Théorème 5.3.1) ce qui permet de montrer l'unicité d'une mesure de Radon invariante (Théorème 5.3.2). On obtient aussi une propriété de divergence pour la projection de la marche aléatoire droite sur \mathbb{R} (Théorème 5.4.1).

Chapitre 6. *Vitesse de systèmes localement contractifs.* On analyse plus en détail la propriété de contraction locale pour la chaîne de Markov induite sur \mathbb{R} en déterminant en particulier la vitesse de cette contraction (Théorème 6.0.2). On généralise ce résultat à des modèles auto-régressifs sur \mathbb{R}^d induits par certaines extensions multidimensionnelles du groupe affine, c'est-à-dire à des processus définis formellement comme en (0.0.1) mais pour lesquels le coefficient de dilatation a_n est remplacé par certains types de matrices triangulaires (Théorème 6.2.1). On obtiendra le même résultat pour la chaîne de Markov sur un groupe de Lie nilpotent N induite par une marche aléatoire sur un groupe résoluble de type NA (Théorème 6.3.1).

Première partie

Marches aléatoires sur le groupe affine
d'un arbre homogène

CHAPITRE 1

Préliminaires

1.1. L'arbre orienté

L'arbre homogène \mathbb{T} de degré $q+1$ est le graphe connexe non orienté sans cycles dans lequel chaque sommet a exactement $q + 1$ voisins. On appelle *géodésique* toute suite (finie ou infinie), $x_0x_1x_2 \cdots$, de sommets voisins sans répétitions. En particulier puisque \mathbb{T} est un arbre, pour chaque couple de sommets x et y , il existe une unique géodésique finie (qu'on notera \overline{xy}) dont le premier sommet est x et le dernier y . On peut munir \mathbb{T} de sa distance usuelle en posant

$$d(x, y) = \text{nombre d'arêtes de } \overline{xy},$$

ce qui fait de l'arbre un espace métrique discret. On fixera aussi un sommet privilégié $o \in \mathbb{T}$, dit *origine*, et on notera $|x| = d(o, x)$.

L'arbre possède un bord naturel qui est constitué de géodésiques qui vont vers l'infini. Plus précisément le *bord de l'arbre*, $\partial\mathbb{T}$, est l'ensemble des rayons géodésiques infinis quotienté par la relation d'équivalence pour laquelle on identifie deux géodésiques qui ne diffèrent que par un nombre fini de sommets. Les éléments du bord sont dits *extrémités* ou *bouts* de \mathbb{T} . Pour tout sommet x et tout bout α , il existe alors une et une seule géodésique, $\overline{x\alpha}$, qui part de x et dans la classe de α . Pour tout couple de bouts α et β dans $\partial\mathbb{T}$, on note $\overline{\alpha\beta}$ la géodésique bi-infinie qui relie α et β .

Si on fixe une extrémité ω dans $\partial\mathbb{T}$, on peut munir \mathbb{T} d'un ordre. En particulier pour tout x et y dans $\mathbb{T} \cup \partial\mathbb{T}$ on pose

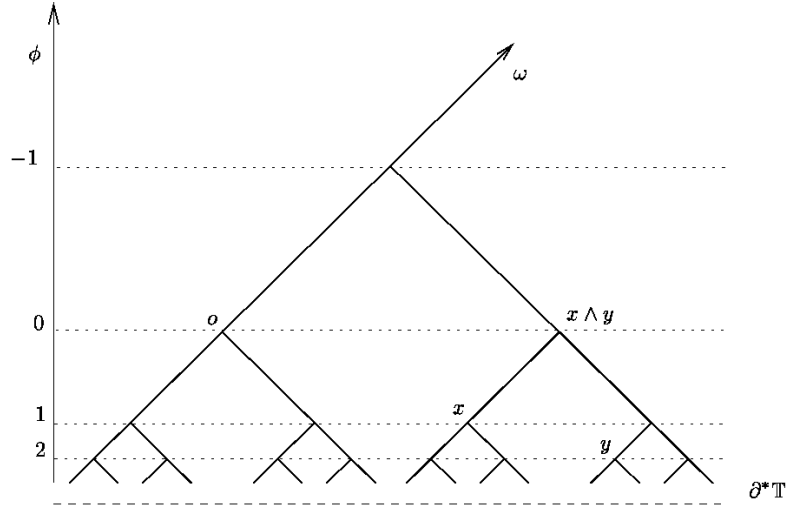
$$x \wedge y = \text{premier sommet commun aux géodésiques } \overline{x\omega} \text{ et } \overline{y\omega},$$

si $x \neq y$ et différent de ω , $x \wedge x = x$ et $x \wedge \omega = \omega \wedge x = \omega$. On a donc un ordre partiel sur $\mathbb{T} \cup \partial\mathbb{T}$

$$x \succeq y \Leftrightarrow x = x \wedge y.$$

On peut imaginer l'arbre \mathbb{T} muni du bout ω comme un arbre généalogique infini : chaque sommet de l'arbre a un père et q fils, $x \succeq y$ si et seulement si y est un descendant de x , tandis que ω représente l'ancêtre mythique. On notera

$$\partial^*\mathbb{T} = \partial\mathbb{T} - \{\omega\}.$$



On remarque que $\mathbb{T} \cup \partial^* \mathbb{T}$ est une compactification de \mathbb{T} . Des voisinages ouverts d'un bout $\alpha \in \partial^* \mathbb{T}$ sont les ensembles

$$C_x := \{y \in \mathbb{T} \cup \partial^* \mathbb{T} \mid x \succeq y\}$$

pour tout $x \in \mathbb{T}$ tel que $x \succeq \alpha$, tandis que les voisinages de ω sont les complémentaires, C_x^c , pour tout $x \in \mathbb{T}$. On observe que les C_x sont des ensembles à la fois ouverts et fermés, et que $\mathbb{T} \cup \partial^* \mathbb{T}$ est un espace totalement discontinu, dans lequel \mathbb{T} est un sous-ensemble discret, ouvert et dense.

On peut définir de façon naturelle une fonction hauteur ϕ de \mathbb{T} dans \mathbb{Z} :

$$\phi(x) := d(x, x \wedge o) - d(o, x \wedge o),$$

aussi connue comme *fonction de Busemann*, qui représente la “génération” de x . Alors

$$\Theta(\alpha, \beta) := \begin{cases} q^{-\phi(\alpha \wedge \beta)} & \text{pour tous } \alpha \neq \beta \in \mathbb{T} \cup \partial^* \mathbb{T} \\ 0 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

est une distance sur $\mathbb{T} \cup \partial^* \mathbb{T}$. Elle est de plus une distance ultramétrique en effet :

$$\Theta(\alpha, \beta) \leq \max\{\Theta(\alpha, \gamma), \Theta(\beta, \gamma)\} \text{ pour tout } \gamma \in \mathbb{T} \cup \partial^* \mathbb{T},$$

car on peut facilement vérifier que $\phi(\alpha \wedge \beta) \geq \min\{\phi(\alpha \wedge \gamma), \phi(\beta \wedge \gamma)\}$.

Pour tout $\alpha \in \partial^* \mathbb{T}$ et pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on dénote α^m le sommet de la géodésique $\overline{\omega\alpha}$ tel que $\phi(\alpha^m) = m$.

1.2. Le groupe des affinités de l'arbre

Le groupe des *isométries* de l'arbre, $\text{Iso}(\mathbb{T})$, c'est-à-dire le groupe des bijections de \mathbb{T} dans lui-même qui préservent la distance d (et donc sa structure de graphe),

a une action naturelle sur le bord de l'arbre induite par l'action sur la géodésique définie par :

$$g(x_0x_1x_2\cdots) = (gx_0gx_1gx_2\cdots).$$

Le groupe des *affinités de l'arbre* est le sous-groupe des isométries qui fixent le bout ω

$$\text{Aff}(\mathbb{T}) := \{g \in \text{Iso}(\mathbb{T}) : g\omega = \omega\},$$

c'est-à-dire le groupe des isométries qui respectent l'ordre induit par ω ,

$$g(x \wedge y) = gx \wedge gy \quad \text{pour tout } g \in \text{Aff}(\mathbb{T}).$$

On munit le groupe $\text{Aff}(\mathbb{T})$ de la topologie de la convergence ponctuelle sur \mathbb{T} . Puisque l'arbre a une topologie discrète, une base de voisinages ouverts de l'identité, e , est donnée par les stabilisateurs des ensembles finis de sommets, c'est-à-dire par

$$V(x_1, \dots, x_n) := \{g \in \text{Aff}(\mathbb{T}) : gx_i = x_i \forall i = 1 \dots n\} \quad \text{avec } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{T}.$$

Ces ensembles sont à la fois ouverts, fermés et compacts, et donc $\text{Aff}(\mathbb{T})$ est un groupe localement compact totalement discontinu. On observe aussi que les ensembles $V(x_1, \dots, x_n)$ sont aussi des sous-groupes.

Pour tout $g \in \text{Aff}(\mathbb{T})$, on pose

$$|g| = d(g\omega, \omega),$$

et bien que cette application ne définit pas une norme elle est symétrique, $|g| = |g^{-1}|$, et vérifie l'inégalité triangulaire, $|g_1g_2| \leq |g_1| + |g_2|$.

1.2.1. Drift d'une affinité. Puisque les affinités de l'arbre préserve l'orientation et la distance, on peut voir facilement que pour tout couple de sommets x et y

$$\phi(gx) - \phi(gy) = \phi(x) - \phi(y).$$

On peut alors définir l'homomorphisme :

$$\begin{aligned} \phi : \text{Aff}(\mathbb{T}) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ g &\mapsto \phi(g\omega); \end{aligned}$$

qui indique comment les affinités agissent sur les hauteurs de l'arbre et qui jouera un rôle fondamental dans toute la suite. On observe que $\phi(gx) = \phi(g) + \phi(x)$ pour tout sommet x , et que pour tout couple de bouts α et β de $\partial^*\mathbb{T}$

$$(1.2.1) \quad \Theta(g\alpha, g\beta) = q^{-\phi(g\alpha \wedge g\beta)} = q^{-\phi(g)}\Theta(\alpha, \beta),$$

donc l'affinité g agit sur $(\partial^*\mathbb{T}, \Theta)$ comme une contraction ou une dilatation selon le signe de $\phi(g)$.

1.2.2. Le groupe horocyclique. Le *groupe horocyclique* de l'arbre, est le sous-groupe des isométries qui ne changent pas les hauteurs

$$\text{Hor}(\mathbb{T}) := \ker \phi = \{g \in \text{Aff}(\mathbb{T}) : \phi(gx) = \phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{T}\}.$$

La formule (1.2.1) montre que $\text{Hor}(\mathbb{T})$ est le groupe des isométries de $(\partial^*\mathbb{T}, \Theta)$.

On observe que, si α^m est le sommet à la hauteur m de la géodésique qui part de $\alpha \in \partial^*\mathbb{T}$ et va vers ω , alors

$$\text{Hor}(\mathbb{T}) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V(\alpha^m),$$

donc le groupe horocyclique est une union croissante (car $V(\alpha^m) \subset V(\alpha^{m-1})$) de sous-groupes compacts.

Au lieu de travailler sur le groupe affine de l'arbre tout entier, on sera souvent amené à considérer des sous-groupes fermés, Γ , de $\text{Aff}(\mathbb{T})$. On considérera alors l'homomorphisme ϕ comme fonction de Γ sur \mathbb{Z} et on posera

$$\text{Hor}(\Gamma) := \ker \phi = \text{Hor}(\mathbb{T}) \cap \Gamma.$$

1.2.3. Structure algébrique de $\text{Aff}(\mathbb{T})$. Puisque l'image par ϕ de Γ est un sous-groupe de \mathbb{Z} , il existe un nombre entier, τ , tel que $\phi(\Gamma) = \tau\mathbb{Z}$. Pour tout $s \in \text{Aff}(\mathbb{T})$ tel que $\phi(s) = 1$ et $s^\tau \in \Gamma$, on peut décomposer chaque élément de Γ , de manière unique, comme

$$(1.2.2) \quad g = b(g)s^{\phi(g)} \quad \text{avec} \quad b(g) := gs^{-\phi(g)} \in \text{Hor}(\Gamma);$$

de cette façon on peut voir Γ comme produit semi-direct de \mathbb{Z} et $\text{Hor}(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \text{Hor}(\Gamma) \rtimes_s \tau\mathbb{Z} &\cong \Gamma \\ (b, h) &\mapsto bs^h. \end{aligned}$$

Le produit de composition entre deux affinités devient alors

$$(b_1, h_1)(b_2, h_2) = (b_1s^{h_1}b_2s^{-h_1}, h_1 + h_2),$$

où on définit une action de $\text{Aff}(\mathbb{T})$ sur $\text{Hor}(\mathbb{T})$ (ou bien de Γ sur $\text{Hor}(\Gamma)$) qu'on notera :

$$g \cdot b := b(g)s^{\phi(g)}bs^{-\phi(g)} = gbs^{-\phi(g)}$$

La décomposition de $\text{Aff}(\mathbb{T})$ en produit semi-direct de \mathbb{Z} et $\text{Hor}(\mathbb{T})$ dépend du choix de l'élément s . On dénotera avec α_s l'unique élément de $\partial^*\mathbb{T}$ fixé par s^1 ; la géodésique $\overline{\omega\alpha_s}$ est donc envoyée, par la transformation s , en elle-même, et assume, en quelque sorte, le statut de "branche" principale, tandis que les sous-arbres qui branchent de $\overline{\omega\alpha_s}$ sont envoyés par s et ses multiples les uns dans les autres par les translations de la branche principale. En choisissant s on détermine donc un "centre" α_s de $\partial^*\mathbb{T}$ et une identification des sous-arbres secondaires entre eux.

¹pour l'existence et l'unicité voir par exemple [Tit70].

1.2.4. Les rotations. En quelque sorte, le groupe horocyclique, qui est le groupe des isométries du bord $\partial^*\mathbb{T}$, joue le rôle que le groupe des translations joue dans le groupe des transformations affines de la droite réel, mais il a une structure plus complexe car son action sur l'arbre n'est pas univoquement déterminée par l'image d'un point. On peut faire un parallélisme plus approprié avec le groupe des transformations conformes du plan (ou avec le groupe des transformations affines des nombres complexes) car dans ces cas le supplémentaire du groupe des homothéties (qui correspond dans notre cas au groupe engendré par s) contient à la fois les translations et les rotations. Dans le cas du groupe horocyclique le rôle des rotations autour de $\alpha \in \partial^*\mathbb{T}$ est joué par le sous-groupe compact

$$K_\alpha = K_\alpha(\Gamma) = \{r \in \text{Hor}(\Gamma) : r\alpha = \alpha\}.$$

Le groupe de rotations $K_\alpha(\text{Aff}(\mathbb{T}))$ est le groupe des isométries de l'arbre qui fixent tous les points de la géodésique $\overline{\omega\alpha}$ et opère donc séparément sur chacun des sous-arbres qui branchent d'elle. On doit observer que, contrairement à ce qui advient dans le cas des transformations conformes, les rotations ne commutent pas nécessairement avec les homothéties de même centre; en effet si $r \in K_{\alpha_s}$ agit de façon différente (par rapport à l'identification induite par s) sur deux sous-arbres alors $sr \neq rs$. Une autre particularité des transformations affines de l'arbre est que, à cause de l'absence de rigidité dans la structure, on ne dispose pas d'un nombre fini de points dont les images déterminent univoquement une rotation : les éléments de K_α peuvent agir de façon complètement libre sur chacun des sous-arbres qui branchent de $\overline{\omega\alpha}$.

1.2.5. Compactification et bord du groupe. On peut utiliser l'action sur l'arbre pour construire une compactification géométrique naturelle du groupe des affinités. On peut facilement voir que si g_n est une suite dans $\text{Aff}(\mathbb{T})$ telle que pour un $x \in \mathbb{T}$ $g_n x$ converge vers un bout β dans $\partial\mathbb{T}$, alors pour tout $y \in \mathbb{T}$, $g_n y$ converge vers β . On dira dans ce cas que la suite g_n converge vers β . On compactifie donc $\text{Aff}(\mathbb{T})$ dans $\text{Aff}(\mathbb{T}) \cup \partial\mathbb{T}$ en posant

$$g_n \rightarrow \beta \in \partial\mathbb{T} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{T} \quad g_n x \rightarrow \beta$$

Pour tout sous-groupe Γ de $\text{Aff}(\mathbb{T})$, le bord $\partial\Gamma$ sera l'ensemble des points d'accumulation de Γ (c'est-à-dire de l'orbite Γx) dans $\partial\mathbb{T}$.

On observe que si g_n converge vers $\alpha \in \partial^*\mathbb{T}$, alors $\phi(g_n)$ converge vers $+\infty$ et donc g_n^{-1} converge vers ω . On a alors (cf. [CS89]) que

$$(1.2.3) \quad g_n \rightarrow \alpha \in \partial^*\mathbb{T} \Rightarrow g_n y \rightarrow \alpha \quad \forall y \in \mathbb{T} \cup \partial^*\mathbb{T}.$$

1.2.6. Les sous-groupes non-exceptionnels. Notre étude sera focalisée sur des marches aléatoires portées par des sous-groupes de $\text{Aff}(\mathbb{T})$ suffisamment "gros". Plus précisément on s'intéressera aux sous-groupes fermés Γ qui sont *non-exceptionnels* (ou *non-élémentaires*), c'est-à-dire qui vérifient l'une des conditions équivalentes suivantes (cf. [CKW94]) :

- Γ n'est pas contenu dans $\text{Hor}(\mathbb{T})$ et ne fixe aucun élément de $\partial^*\mathbb{T}$.

- Γ est non-unimodulaire
- $\partial\Gamma$ contient un nombre infini d'éléments

Si on revient au parallélisme avec le groupe affine réel, ceci équivaut à demander que Γ n'est ni un sous-groupe des translations ni un sous-groupe de roto-homothéties. Une autre propriété importante d'un groupe fermé Γ non-exceptionnel est qu'il agit transitivement sur le bord $\partial^*\Gamma = \partial\Gamma - \{\omega\}$, i.e. pour tout $\alpha \in \partial^*\Gamma^2$

$$\Gamma\alpha = \partial^*\Gamma.$$

Grâce à la décomposition (1.2.2), on peut voir alors que aussi $\text{Hor}(\Gamma)$ opère transitivement sur $\partial^*\Gamma$.

Puisque le groupe $K_\alpha = K_\alpha(\Gamma)$ est le stabilisateur du bout $\alpha \in \partial^*\Gamma$ dans $\text{Hor}(\Gamma)$ et donc, pour tout s tel que $s\alpha = \alpha$, $\phi(s) = 1$ et $s^\tau \in \Gamma$, $K_\alpha \rtimes_s \tau\mathbb{Z}$ est le stabilisateur de α dans Γ , alors le bord $\partial^*\Gamma$ est homéomorphe aux espaces homogènes $\Gamma/K_\alpha \rtimes_s \tau\mathbb{Z}$ et $\text{Hor}(\Gamma)/K_\alpha$ par l'application $gK_\alpha \mapsto g\alpha$.

1.2.7. La mesure de Haar. On conclut cette présentation de $\text{Aff}(\mathbb{T})$ par une brève caractérisation de sa mesure de Haar. On commence par observer que $\text{Hor}(\Gamma)$ est un groupe unimodulaire, comme union dénombrable de sous-groupes compacts. Ainsi si $s \in \text{Aff}(\mathbb{T})$ tel que $\phi(s) = 1$ et tel que $s^\tau \in \Gamma$, alors la mesure de Haar à droite de Γ , vu comme produit $\text{Hor}(\Gamma) \rtimes_s \tau\mathbb{Z}$, est³

$$m_\Gamma^d = m_{\text{Hor}(\Gamma)} \times m_{\tau\mathbb{Z}} = m_{\text{Hor}(\Gamma)} * m_{\tau\mathbb{Z}}$$

où dans la dernière égalité on a identifié $\tau\mathbb{Z}$ avec le groupe engendré par s^τ .

On peut calculer le module avec l'observation suivante. Soit x un sommet de la géodésique $\overline{\alpha_s\omega}$, alors clairement $s^\tau x$ est un "descendant" de x et $V(s^\tau x)$ est un sous-groupe de $V(x)$ d'indice fini \tilde{q} . Soient $b_i \in \text{Hor}(\Gamma)$ pour $i = 1 \dots \tilde{q}$ des représentants des classes latérales alors

$$m_\Gamma^d(V(x)) = \sum_{i=1}^{\tilde{q}} m_\Gamma^d(b_i V(s^\tau x)) = \tilde{q} m_\Gamma^d(V(s^\tau x)) = \tilde{q} m_\Gamma^d(s^\tau V(x) s^{-\tau})$$

²On peut déduire cela du fait, démontré dans [CKW94], que $\Gamma\alpha$ est dense dans $\partial^*\Gamma$. En effet soit s tel que $\phi(s) = 1$ et $s^\tau \in \Gamma$ (où $\tau \in \mathbb{N}$ est tel que $\phi(\Gamma) = \tau\mathbb{Z}$) et α_s tel que $s\alpha_s = \alpha_s$, on a alors

$$\partial^*\Gamma = \overline{\Gamma\alpha_s} = \overline{\text{Hor}(\Gamma) \rtimes_s \tau\mathbb{Z}\alpha_s} = \overline{\text{Hor}(\Gamma)\alpha_s}$$

Pour tout β dans $\partial^*\Gamma$, il existe alors une suite $\{b_n\}_n$ dans $\text{Hor}(\Gamma)$ telle que $b_n\alpha_s$ converge vers β . La suite b_n est alors relativement compacte (car elle est dans $V(\alpha_s \wedge \beta)$ pour tout n suffisamment grand) et si b est un point d'accumulation (qui est dans $\text{Hor}(\Gamma)$ parce qu'il est fermé) alors $b\alpha_s = \beta$. Ceci prouve que $\Gamma\alpha_s = \partial^*\Gamma$. Pour α générique on peut trouver par ce qui précède un $g \in \Gamma$ tel que $g\alpha = \alpha_s$ et on se reconduit au cas précédent.

³On notera $m_\mathfrak{G}$ (resp. $m_\mathfrak{G}^d$ et $m_\mathfrak{G}^g$) la mesure de Haar (resp. à droite ou à gauche) du groupe \mathfrak{G} .

On peut en déduire que pour tout ensemble mesurable A

$$g * m_{\Gamma}^d(A) = m_{\Gamma}^d(g^{-1}A) = (\tilde{q}^{1/\tau})^{\phi(g)} m_{\Gamma}^d(A).$$

On observe que \tilde{q} est le nombre de descendants de x , après τ générations, qui sont dans l'orbite Γx et donc, si Γ agit transitivement sur l'arbre, $\tau = 1$ et $\tilde{q} = q$.

1.3. Exemples de sous-groupes de $\text{Aff}(\mathbb{T})$

Comme on a essayé de le mettre en évidence dans ce qui précède, la structure du groupe affine de l'arbre est très complexe ; puisque l'arbre a une topologie discrète et que la structure de graphe impose des contraintes très faibles, le groupe affine contient des transformations (et donc des sous-groupes) qui peuvent agir de manière très différente sur les différentes branches de l'arbre. Cependant, si on munit l'arbre d'une structure algébrique moins flexible que celle de simple graphe, on peut identifier des sous-groupes remarquables qui, au-delà de leur intérêt intrinsèque, nous fourniront des exemples maniables de sous-groupes non-exceptionnels. On en donne ici deux exemples.

1.3.1. Les corps locaux et les rationnels p -adiques. Un corps \mathcal{F} (qu'on suppose commutatif), muni d'une valuation discrète v , c'est-à-dire d'un homomorphisme de \mathcal{F}^* dans \mathbb{Z} telle que

$$v(u + v) \geq \max\{v(u), v(v)\} \quad \text{pour tout } u \text{ et } v \in \mathcal{F}^*,$$

est un *corps local* (ultramétrique) si le corps quotient, dit *corps résiduel*, entre l'*anneau des entiers* $\mathcal{E} = \{u \in \mathcal{F} : v(u) \geq 0\}$ et l'idéal $\{u \in \mathcal{F} : v(u) \geq 1\}$ est de cardinal fini égale à q et si \mathcal{F} muni de la distance ultra-métrique

$$\Theta(u, v) = |u - v| = q^{-v(u-v)}$$

est complet.

L'exemple plus important de corps local est donné par le *corps des rationnels p -adiques*, \mathbb{Q}_p , qui est construit de la façon suivante. On fixe un nombre premier p et on définit sur l'ensemble des nombres rationnels la valuation qui mesure la divisibilité par les puissances de p , i.e pour chaque $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, on pose

$$v_p\left(\frac{r}{s}\right) = v_p(r) - v_p(s)$$

où $v_p(n) := \max\{k \in \mathbb{N} : p^k \text{ divise } n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le corps des rationnels p -adiques est alors le complété de \mathbb{Q} muni de la norme

$$|u|_p = p^{-v_p(u)} \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{Q}.$$

Dans ce cas le corps résiduel est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $q = p$.

L'arbre homogène peut fournir une représentation visuelle de la topologie d'un corps local quelconque. On commence par observer que les disques de \mathcal{F} ,

$$D(u, R) = \{v \in \mathcal{F} : |u - v| \leq R\},$$

ont des propriétés tout à fait différentes de ceux de \mathbb{R} . Premièrement, puisque la valuation prend des valeurs discrètes, pour tout $q^k \leq R < q^{k+1}$

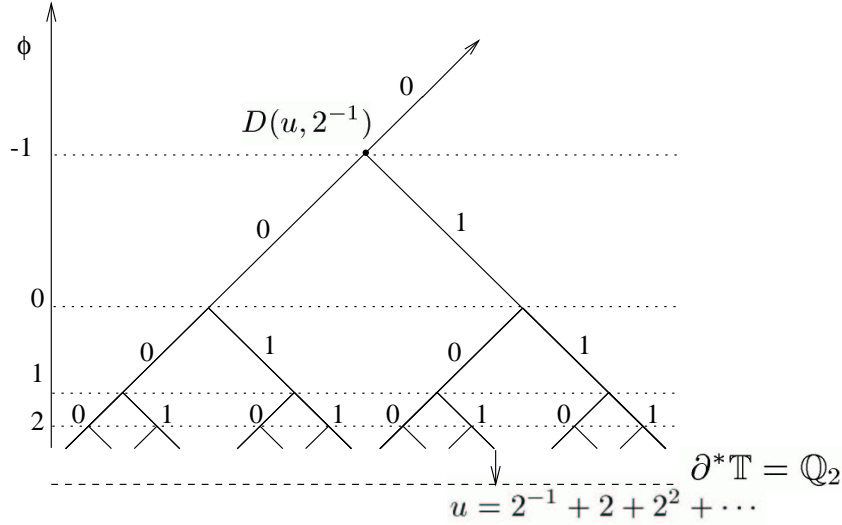
$$D(u, R) = D(u, q^k)$$

et les disques sont à la fois ouverts et fermés. Grâce à la propriété ultra-métrique, on a que deux disques qui ont le même rayon peuvent coïncider ou être disjoints, mais il ne peuvent pas se superposer partiellement; de plus chaque disque de rayon q^k contient exactement q disques de rayon q^{k-1} . On peut alors construire un arbre homogène orienté en identifiant les sommets de l'arbre avec les disques de \mathcal{F} et en disposant à l'étage k les disques de rayon q^{-k} , c'est-à-dire

$$\phi(D(u, q^{-k})) = k,$$

de sorte que le disque $D(u, q^{-k})$ ait comme père le disque $D(u, q^{-k+1})$. Un élément du bord $\partial^*\mathbb{T}$ de l'arbre peut alors être identifié avec une suite $\{D(u, q^{-k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ de disques emboîtés dont les rayons convergent vers zéro et donc avec le point $u = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} D(u, q^{-k})$ de \mathcal{F} ; ceci établit donc une correspondance (qui est en fait une isométrie) entre le corps local et le bord de l'arbre

$$\mathcal{F} = \partial^*\mathbb{T}.$$



L'identification du bord de l'arbre avec le corps local peut être aussi retrouvée en observant que, si on choisit $\mathfrak{p} \in \mathcal{F}$ tel que $v(\mathfrak{p}) = 1$ et un ensemble de représentants $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{s}_0, \dots, \mathfrak{s}_{q-1}\}$ de l'idéal $\{u \in \mathcal{F} : v(u) \geq 1\}$ dans l'anneau des entiers, alors un élément quelconque de \mathcal{F} s'écrit de manière unique sous la forme

$$u = \sum_{i=v(u)}^{\infty} u_i \mathfrak{p}^i \text{ avec } u_i \in \mathfrak{S} \text{ et } u_{v(u)} \neq 0.$$

Dans le cas de \mathbb{Q}_p , on peut poser $\mathfrak{p} = p$ et $\mathfrak{S} = \{0, 1, \dots, p-1\}$. Si pour chaque sommet de l'arbre on étiquette les q arêtes qui descendent vers les fils avec les éléments de \mathfrak{S} , alors tout bout dans $\partial^*\mathbb{T}$ sera naturellement identifié avec l'élément du corps dont les coordonnées dans sa représentation en série infinie correspondent aux étiquettes des arêtes de la géodésique.

On définit le groupe, $\text{Aff}(\mathcal{F})$, des transformations affines de \mathcal{F} , conformément à celui réel, comme l'ensemble des transformations du type

$$g = (t, a) : u \mapsto au + t \text{ avec } a \in \mathcal{F}^* \text{ et } t \in \mathcal{F}.$$

Ce groupe peut être réalisé comme le groupe des matrices

$$\text{Aff}(\mathcal{F}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathcal{F}^* \text{ et } t \in \mathcal{F} \right\}.$$

Puisque les affinités envoient les disques dans les disques :

$$(t, a)D(u, q^{-k}) = D(au + t, q^{-(k+v(a))})$$

elles respectent l'ordre de l'arbre (c'est-à-dire la relation d'inclusion) et elles forment un sous-groupe fermé de $\text{Aff}(\mathbb{T})$.

On observe qu'il apparaît naturel de voir $\text{Aff}(\mathcal{F})$ comme produit semi-direct $\mathcal{F} \rtimes \mathcal{F}^*$, puisque l'affinité (t, a) est la composition d'une translation $u \mapsto u + t$ et d'une roto-homothétie $u \mapsto au$. Toutefois cette décomposition ne coïncide pas avec la décomposition qu'on a introduit précédemment en $\text{Hor}(\mathcal{F}) \rtimes \mathbb{Z}$. En effet, puisque

$$\phi((t, a)) = v(a),$$

le groupe horocyclique est le groupe

$$\text{Hor}(\mathcal{F}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Aff}(\mathcal{F}) : |a| = 1 \right\} = \mathcal{F} \rtimes \mathcal{E}$$

et contient donc à la fois le groupe des rotations autour de 0

$$K_0(\mathcal{F}) = \mathcal{E}$$

et les translations

$$\text{Tra}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}.$$

La multiplication dans \mathcal{F} par \mathfrak{p}

$$s : u \mapsto \mathfrak{p}u,$$

induit une isométrie de l'arbre vérifiant $\phi(s) = 1$, que l'on choisira comme homothétie privilégiée.

Le groupe des affinités d'un corps local présente trois caractéristiques essentielles qui simplifient son étude par rapport au cas général du groupe $\text{Aff}(\mathbb{T})$ et qui le rapprochent beaucoup du groupe des transformations conformes de l'espace euclidien. Premièrement il possède la propriété de rigidité qu'on a énoncée au début de cette section : puisque chaque affinité est identifiée par deux paramètres t

et a , il suffit de connaître les images de deux points de \mathcal{F} pour la déterminer univoquement. Deuxièmement, mais de façon peut être plus importante, le groupe des roto-homothéties, i.e. le stabilisateur de 0,

$$K_0(\mathcal{F}) \rtimes_p \mathbb{Z} = \mathcal{F}^*$$

est commutatif, comme le sont tous les stabilisateurs des points de $\partial^*\mathbb{T}$, puisqu'il lui sont conjugués. Enfin le bord $\partial^*\mathbb{T}$ étant identifié à \mathcal{F} est muni d'une structure de groupe commutatif.

Dans la suite on s'occupera seulement du groupe affine de rationnels p -adiques, mais tous les résultats démontrés dans ce contexte sont valables pour le groupe affine d'un corps local quelconque. Un des intérêts du groupe affine p -adique est qu'il contient le groupe des transformations affines à coefficients rationnels, $\text{Aff}(\mathbb{Q})$. Plusieurs résultats qu'on verra dans la suite sont applicables à des marches aléatoires sur $\text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$ dont la loi n'est pas nécessairement étalée. Ils sont donc valables pour des lois qui ne chargent que $\text{Aff}(\mathbb{Q})$. L'intérêt pour ces marches est grandissant (elles interviennent, entre autres, dans les processus pour la génération de nombres pseudo-aléatoires dans les ordinateurs) et il semble vraisemblable qu'on ne puisse parvenir à une compréhension complète des leurs comportements en mesure (qui n'est pas nécessairement lié à la métrique euclidienne) qu'en les plongeant simultanément dans le groupe affine réel et dans tous les groupes affines p -adiques.

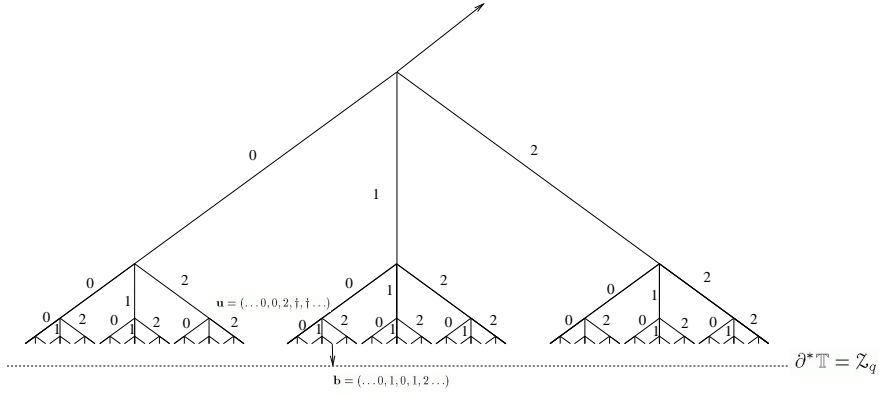
1.3.2. L'arbre comme suites de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Un autre exemple de sous-groupe de $\text{Aff}(\mathbb{T})$ qui présente les mêmes caractéristiques de régularité que celles de $\text{Aff}(\mathcal{F})$, peut être obtenu en identifiant l'arbre avec les suites d'éléments du groupe $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, bi-infinies et nulles à partir d'un certain rang. Plus précisément on considère le groupe

$$\mathcal{Z}_q := \{ \mathbf{b} \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \forall i \leq k \ b_i = 0 \}$$

muni de la somme induite par $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Comme dans le corps local, on peut naturellement identifier \mathcal{Z}_q avec le bord de l'arbre $\partial^*\mathbb{T}$ en étiquetant chacune des q arêtes qui sortent de chaque sommet vers ses fils par les éléments de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. L'élément \mathbf{u} de \mathcal{Z}_q sera alors identifié avec la géodésique qu'on obtient en partant de ω et en suivant le chemin indiqué par les étiquettes u_i . L'arbre \mathbb{T} coïncidera alors avec les chemins qui partent de ω et qui s'arrêtent à un certain moment. L'introduction d'un symbole auxiliaire \dagger , c'est-à-dire d'une "arête cimetièrre", permet d'associer à un tel chemin une suite de la forme $(\dots, 0, u_{k+1}, \dots, u_j, \dagger, \dots)$ et donc d'identifier l'arbre avec certaines suites de $\mathbb{Z}_q \cup \{\dagger\}$:

$$\mathbb{T} = \left\{ \mathbf{u} \in (\mathbb{Z}_q \cup \{\dagger\})^{\mathbb{Z}} \mid \exists k \leq j \in \mathbb{Z} \begin{cases} u_i = 0 & i \leq k \\ u_i \in \mathbb{Z}_q & k < i \leq j \\ u_i = \dagger & j < i \end{cases} \right\}.$$

L'indice j indique alors le niveau du sommet \mathbf{u} .



Le groupe \mathcal{Z}_q agit sur $\mathbb{T} \cup \partial^*\mathbb{T}$ par la somme :

$$\mathbf{b}\mathbf{u} = \{b_i + u_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \text{ pour tout } \mathbf{b} \in \mathcal{Z}_q \text{ et } \mathbf{u} \in \mathbb{T} \cup \partial^*\mathbb{T}$$

lorsque on pose $b + \dagger = \dagger$. De plus le décalage \mathbf{s} sur \mathcal{Z}_q induit une action de \mathbb{Z} sur l'arbre et sur son bord définie par

$$\mathbf{s}^h \mathbf{u} = \{u_{i+h}\}_{i \in \mathbb{Z}}.$$

On définit alors le groupe affine de \mathcal{Z}_q comme le groupe engendré par les translations \mathcal{Z}_q et l'homothétie \mathbf{s} et on a

$$\text{Aff}(\mathcal{Z}_q) = \mathcal{Z}_q \rtimes_{\mathbf{s}} \mathbb{Z}.$$

On observe que le groupe horocyclique de $\text{Aff}(\mathcal{Z}_q)$ est le groupe de translations \mathcal{Z}_q et, puisqu'il agit librement sur $\partial^*\mathbb{T}$, que le groupe des rotations est réduit à l'identité.

1.4. Les marches aléatoires sur $\text{Aff}(\mathbb{T})$

Soit μ une mesure de probabilité sur $\text{Aff}(\mathbb{T})$ et $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de l'espace de probabilité (Ω, \mathbb{P}) à valeurs dans $\text{Aff}(\mathbb{T})$, indépendantes et de même loi μ . La *marche aléatoire gauche* est le processus de Markov sur le groupe $\text{Aff}(\mathbb{T})$ défini par les produits itérés à gauche des variables X_n

$$L_n = X_n X_{n-1} \cdots X_1 \quad L_0 = e;$$

de même la *marche aléatoire droite* est le processus défini par multiplication à droite

$$R_n = X_1 \cdots X_{n-1} X_n \quad R_0 = e.$$

Pour tout instant n fixé, ces deux processus ont même loi égale à la n -ième puissance de convolution de μ

$$L_n \stackrel{\text{loi}}{=} R_n \sim \mu^{(n)},$$

mais on verra que, du point de vu trajectorien, ils sont très différents.

Le passage à l'inverse change l'ordre des termes d'un produit et il nous permet donc de relier l'étude d'une marche aléatoire droite à celle d'une marche aléatoire gauche. En particulier

$$L_n^{-1} = X_n^{-1} \cdots X_1^{-1} = \hat{R}_n$$

est une marche aléatoire droite de loi $\hat{\mu}$, image de μ sous la transformation $g \mapsto g^{-1}$.

On supposera toujours que le sous-groupe fermé de $\text{Aff}(\mathbb{T})$ engendré par le support de μ

$$\Gamma := \overline{\langle \text{supp} \mu \rangle}$$

est un groupe non-exceptionnel et, donc, non-unimodulaire. Un résultat fondamental (cf. [GKR77]) assure alors que les marches aléatoires de loi μ sont toujours transientes, i.e. presque sûrement leurs trajectoires ne visitent qu'un nombre fini de fois les ensembles compacts. La *mesure potentiel*, i.e. la mesure

$$U(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^{(i)}(A) = \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{\infty} 1_{[L_n \in A]} \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{\infty} 1_{[R_n \in A]} \right]$$

est alors une mesure de Radon sur Γ .

1.4.1. Les processus induits. Un rôle crucial dans l'étude des marches aléatoires R_n et L_n est joué par leur projection sur \mathbb{Z} , c'est-à-dire par la marche aléatoire

$$S_n = \phi(X_1) + \cdots + \phi(X_n) = \phi(L_n) = \phi(R_n).$$

Sa moyenne, qu'on appellera *drift* de μ ,

$$\mu(\phi) = \mathbb{E}[\phi(X_1)]$$

nous permettra de classer les différents types de comportement.

Si on considère l'action du groupe $\text{Aff}(\mathbb{T})$ sur un espace \mathcal{Y} (notamment l'arbre et son bord $\partial^* \mathbb{T}$) la marche aléatoire gauche peut être vue comme une succession des transformations aléatoires de l'espace de \mathcal{Y} , et il est donc naturel de considérer la chaîne de Markov induite sur \mathcal{Y}

$$Y_n = X_n \cdot Y_{n-1} = X_n \cdots X_1 \cdot Y_0 = L_n \cdot Y_0.$$

L'action de la marche droite sur \mathcal{Y} , induit un processus

$$Z_n = R_n \cdot Z_0$$

qui n'est pas, en général, un processus de Markov, mais qui respecte mieux la structure de l'espace. Par exemple si $\text{Aff}(\mathbb{T})$ agit par isométrie sur \mathcal{Y} alors

$$d(Z_n, Z_{n-1}) = d(X_n \cdot Z_0, Z_0)$$

c'est-à-dire que la loi de la distance entre deux pas successifs ne dépend ni du temps n ni d'où se trouve le processus. Pour que le processus Z_n soit une chaîne de Markov il faut que la loi μ soit invariante par l'action à droite du stabilisateur,

Γ_y , d'un point $y \in \mathcal{Y}$. Sous cette condition le processus $Z_n = R_n \Gamma_y$ est une chaîne de Markov sur $\Gamma/\Gamma_y \subseteq \mathcal{Y}$ homogène sous l'action de Γ , i.e

$$\mathbb{P}[Z_n \in gA \mid Z_{n-1} = gx] = \mathbb{P}[Z_n \in A \mid Z_{n-1} = x] \quad \forall g \in \Gamma.$$

Si on considère l'action sur l'arbre \mathbb{T} , on peut, de cette façon, relier les marches aléatoires sur le groupe avec certaines marches aléatoires sur l'arbre, vu en tant que graphe.

1.4.2. Convergence de la marche aléatoire droite vers le bord. Comme on l'a déjà indiqué, on supposera toujours dans ce qui suit que le sous-groupe fermé Γ engendré par le support de μ est non-exceptionnel. Sous cette hypothèse les marches aléatoires, L_n et R_n sont transientes et donc tous les points d'accumulation de leurs trajectoires sont sur le bord de l'arbre. Les marches aléatoire ont été étudiées par Cartwright, Kaimanovich et Woess dans [CKW94], où il montre notamment que la marche aléatoire droite converge toujours vers une variable aléatoire à valeur dans $\partial\mathbb{T}$. Nous allons donner ici une version un peu plus fort, en affaiblissant les hypothèses requise dans le cas de drift nul.

THÉORÈME 1.4.1. *Supposons que le groupe fermé engendré par le support de μ est non-exceptionnel et que $\mathbb{E}[|\phi(X_1)|] < \infty$. Rappelons que $\mu(\phi) = \mathbb{E}[\phi(X_1)]$.*

- (1) *Si $\mu(\phi) < 0$ alors $R_n \rightarrow \omega$ presque sûrement.*
- (2) *Si $\mu(\phi) > 0$ et $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ alors $R_n \rightarrow \xi_\infty$ presque sûrement où ξ_∞ est un élément aléatoire dans $\partial^*\mathbb{T}$ de loi ν . En plus ν ne charge pas les points.*
- (3) *Si $\mu(\phi) = 0$ et $\mathbb{E}[|\phi(o \wedge X_1^{-1}o)|] < \infty$ alors $R_n \rightarrow \omega$ presque sûrement*

DÉMONSTRATION. Le résultat 1. et 2. sont dans [CKW94]. On va esquisser une nouvelle preuve de 3. qui permet d'affaiblir les hypothèses, en suivant le même schéma que le Théorème 5.2.1. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{T}$

$$\mathbb{P}[R_n o \in C_x \text{ une infinité de fois}] = 0.$$

On commence à montrer que pour tout $x \in \mathbb{T}$ et $m_{\mathbb{T}}^d$ -presque tout $g \in \Gamma$

$$\mathbb{P}[gR_{n+1}o \in C_x, gR_n o \notin C_x \text{ une infinité de fois}] = 0.$$

Grâce au lemme de Borel-Cantelli, il suffit de montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[gR_{n+1}o \in C_x, gR_n o \notin C_x] = g * U(\psi) < +\infty$$

où $\psi(g) = \mathbb{P}[gX_1o \in C_x, go \notin C_x]$ et donc, utilisant le Lemme 5.2.2, que ψ est $m_{\mathbb{T}}^d$ -intégrable.

On observe que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \psi(g) m_{\Gamma}^d(dg) &= \mathbb{P} \left[\int_{\Gamma} 1_{[gX_1o \in C_x, go \notin C_x]} m_{\Gamma}^d(dg) \right] \\ &= \mathbb{P} \left[\int_{\Gamma} 1_{[go \in C_x, gX_1^{-1}o \notin C_x]} m_{\Gamma}^d(dg) \right] \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} \{g \in \Gamma : go \in C_x, gX_1^{-1}o \notin C_x\} &= \{g \in \Gamma : go \in C_x, g(o \wedge X_1^{-1}o) \notin C_x\} \\ &= \bigcup_{y \in S} V(y \rightarrow o) \end{aligned}$$

où $V(y \rightarrow o) = \{g \in \Gamma : gy = o\}$ et S est le segment géodésique que va de o au sommet qui précède immédiatement $o \wedge X_1^{-1}o$. Puisque si $\gamma o = y$

$$m_{\Gamma}^d(V(y \rightarrow o)) = m_{\Gamma}^d(V(o \rightarrow o)\gamma) = m_{\Gamma}^d(V(o))$$

et puisque l'ensemble S contient $-\phi(o \wedge X_1^{-1}o)$ sommets, on a que

$$\int_{\Gamma} 1_{[go \in C_x, gX_1^{-1}o \notin C_x]} m_{\Gamma}^d(dg) \leq -\phi(o \wedge X_1^{-1}o) m_{\Gamma}^d(V(o))$$

et donc

$$\int_{\Gamma} \psi(g) m_{\Gamma}^d(dg) \leq \mathbb{E}[-\phi(o \wedge X_1^{-1}o)] m_{\Gamma}^d(V(o)) < +\infty.$$

On a donc que pour presque tout g , presque sûrement, $gR_n o$ ne peut passer de C_x^c à C_x qu'un nombre fini de fois. On observe que si $g \in V(x)$

$$\begin{aligned} [gR_{n+1}o \in C_x, gR_n o \notin C_x] &= [R_{n+1}o \in g^{-1}C_x, R_n o \notin g^{-1}C_x] \\ &= [R_{n+1}o \in C_x, R_n o \notin C_x]. \end{aligned}$$

Puisque l'ensemble $V(x)$ est ouvert et il a une mesure strictement positive, il existe un $g \in V(x)$ tel que presque sûrement l'événement $[gR_{n+1}o \in C_x, gR_n o \notin C_x]$ a lieu un nombre fini de fois et donc pour tout $x \in \mathbb{T}$

$$\mathbb{P}[R_{n+1}o \in C_x, R_n o \notin C_x \text{ une infinité de fois}] = 0.$$

D'autre part, l'arbre à un nombre dénombrable de sommets et on peut alors conclure que presque sûrement

$$\forall x \in \mathbb{T} \ R_{n+1}o \in C_x, R_n o \notin C_x \text{ un nombre fini de fois.}$$

Si $\mu(\phi) = 0$, alors la marche aléatoire $\phi(R_n)$ est récurrente sur \mathbb{Z} , et visite un nombre infini de fois $]-\infty, \phi(x)]$, en particulier $R_n o \in C_x^c$ une infinité de fois. Comme, partant de C_x^c elle ne revient en C_x qu'un nombre fini de fois, d'après ce qui précède, on conclut qu'elle est dans C_x^c pour tout n assez grand. \square

CHAPITRE 2

Chaîne de Markov induite sur le bord $\partial^*\mathbb{T}$

Le groupe affine a une action naturelle sur le bord de l'arbre, qui peut être considéré aussi comme bord du groupe lui même. Le but de ce chapitre est d'étudier la chaîne de Markov sur $\partial^*\mathbb{T}$ induite par la marche aléatoire sur le groupe.

L'analogue de cette chaîne de Markov dans le cadre du groupe des transformations affines de la droite réelle $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est le processus induit sur \mathbb{R} par l'action canonique, c'est-à-dire la projection sur \mathbb{R} de la marche aléatoire sur le groupe. On doit remarquer que, tandis que dans le cas réel la connaissance du comportement de cette chaîne avec celui de la marche aléatoire sur \mathbb{R}_+^* décrit complètement la marche aléatoire sur le groupe, dans le cas de l'arbre la marche aléatoire est beaucoup plus complexe. En effet le groupe affine est le produit semi-direct de \mathbb{Z} et du groupe $\text{Hor}(\mathbb{T})$ qui est plus "grand" que le bord de l'arbre. Plus précisément $\text{Hor}(\mathbb{T})$ fibre sur $\partial^*\mathbb{T}$ et peut être identifié avec $\partial^*\mathbb{T} \times K_\alpha$ où K_α est le sous-groupe compact de $\text{Hor}(\mathbb{T})$ qui fixe une extrémité fixée α de $\partial^*\mathbb{T}$. On pourrait s'intéresser à la chaîne de Markov induite sur le groupe horocyclique par l'action de $\text{Aff}(\mathbb{T})$ qui définit le produit semi-direct, mais les techniques qu'on utilisera ici ne sont pas adaptées, principalement parce que le comportement sur le groupe horocyclique ne dépend pas suffisamment de la marche aléatoire sur \mathbb{Z} .

Soit Y_0 une variable aléatoire de l'espace de probabilité (Ω, \mathbb{P}) à valeurs dans $\partial^*\mathbb{T}$, indépendante des pas $\{X_n\}_n$ de la marche aléatoire. La chaîne de Markov induite sur le bord $\partial^*\mathbb{T}$ est la suite de variables obtenue appliquant successivement les transformations affines, soit :

$$Y_k = L_k \cdot Y_0 = X_k \cdots X_1 \cdot Y_0.$$

C'est une chaîne homogène de noyau de transition :

$$Pf(\xi) = \mathbb{E}[f(X_1\xi)] = \int_{\text{Aff}(\mathbb{T})} f(g\xi)\mu(dg)$$

Comme dans le cas réel le comportement de la chaîne sur le bord sera directement lié à celui de la marche aléatoire $S_n = \phi(L_n)$ sur \mathbb{Z} . Le paramètre discriminant sera en conséquence la moyenne du pas de cette marche

$$\mu(\phi) = \mathbb{E}[\phi(X_1)],$$

qu'on appellera aussi *drift*. Dans les cas où $\mu(\phi) \neq 0$, on pourra utiliser ce qu'on connaît déjà pour la marche aléatoire sur le groupe affine pour mettre en évidence

des propriétés de récurrence ou transience. Le cas $\mu(\phi) = 0$ est plus délicat et sera traité dans une section à part car il requiert des techniques plus sophistiquées.

2.1. Le cas de drift non nul

L'action d'une transformation $g \in \text{Aff}(\mathbb{T})$ sur le bord $\partial^*\mathbb{T}$ muni de la distance Θ se comporte comme une contraction ou une dilatation selon le signe de $\phi(g)$; en effet on a vu que

$$\Theta(g\alpha, g\beta) = q^{-\phi(g)}\Theta(\alpha, \beta)$$

Lorsque $\mu(\phi) < 0$, les transformations L_n tendent à dilater et par conséquent la chaîne de Markov $L_n\xi$ sera essentiellement transiente, tandis que dans le cas contraire on aura un phénomène de récurrence.

PROPOSITION 2.1.1. *Supposons que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$.*

(1) *Si $\mu(\phi) < 0$ alors pour tout $\xi \in \partial^*\mathbb{T}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n\xi = \omega$$

presque sûrement et la chaîne $\{Y_n\}_n$ est transiente.

(2) *Si $\mu(\phi) > 0$ alors la loi ν de la variable aléatoire $\xi_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$ est l'unique mesure de probabilité invariante pour la chaîne de Markov Y_n sur $\partial^*\mathbb{T}$.*

De plus pour tout ouvert U dans $\partial^\mathbb{T}$ tel que $\nu(U) > 0$, presque sûrement pour tout bout $\xi \in \partial^*\mathbb{T}$:*

$$L_n\xi \in U \text{ infiniment souvent}$$

et la chaîne $\{Y_n\}_n$ est récurrente.

DÉMONSTRATION. (1) La distance entre $L_n\xi$ et un point fixé α de $\partial^*\mathbb{T}$ est donnée par :

$$\Theta(L_n\xi, \alpha) = q^{-\phi(L_n)}\Theta(\xi, L_n^{-1}\alpha)$$

Puisque $\mu(\phi) < 0$, la marche aléatoire $\phi(L_n)$ sur \mathbb{Z} converge presque sûrement vers $-\infty$. En outre le théorème 1.4.1 nous garantit que la marche aléatoire droite $\hat{R}_n = L_n^{-1}$ converge vers un élément aléatoire $\hat{\xi}_\infty$ de $\partial^*\mathbb{T}$ dont la loi ne charge aucun point. Alors pour tout bout ξ dans $\partial^*\mathbb{T}$ il existe un sous-ensemble $\Omega_\xi \subseteq \Omega$ de probabilité 1 tel que dans Ω_ξ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(L_n) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{R}_n = \hat{\xi}_\infty \neq \xi$$

et, par conséquent, $L_n^{-1}\alpha$ converge vers le même bout $\hat{\xi}_\infty \neq \xi$. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta(L_n^{-1}\alpha, \xi) = \Theta(\hat{\xi}_\infty, \xi) > 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta(L_n\xi, \alpha) = +\infty.$$

2. On commence par montrer que ν est une mesure invariante. Soit f une fonction continue et bornée sur $\partial^*\mathbb{T}$ et X une variable aléatoire sur $\text{Aff}(\mathbb{T})$ de loi μ indépendante de la suite $\{X_n\}_{n \geq 1}$ alors :

$$\begin{aligned} \mu * \nu(f) &= \mathbb{E}[f(X\xi_\infty)] = \mathbb{E}\left[f\left(X \lim_{n \rightarrow \infty} X_1 \cdots X_n\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} XX_1 \cdots X_n\right)\right] \text{ parce que } X \text{ agit continuellement sur } \mathbb{T} \cup \partial^*\mathbb{T} \\ &= \mathbb{E}[f(\xi_\infty)] = \nu(f) \end{aligned}$$

et par conséquent ν est une probabilité invariante pour Y_n . Si η est une autre mesure de probabilité invariante et Y_0 une variable aléatoire sur $\partial^*\mathbb{T}$ de loi η , indépendante de la suite des pas $\{X_n\}_n$, alors pour toute fonction continue et bornée f sur $\partial^*\mathbb{T}$ et pour tout nombre entier n :

$$\eta(f) = \mathbb{E}[f(L_n Y_0)] = \mathbb{E}[f(R_n Y_0)]$$

Puisque R_n converge presque sûrement vers un bout ξ_∞ dans $\partial^*\mathbb{T}$ alors presque sûrement $R_n Y_0$ converge aussi vers ξ_∞ . Donc, par le théorème de convergence dominée

$$\eta(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(R_n Y_0)] = \mathbb{E}[f(\xi_\infty)] = \nu(f)$$

c'est-à-dire que ν est l'unique mesure de probabilité invariante.

Soit U un sous-ensemble mesurable de $\partial^*\mathbb{T}$ tel que $\nu(U) > 0$. On veut montrer que pour ν -presque tout α dans $\partial^*\mathbb{T}$ la suite $L_n \alpha$ visite U une infinité de fois. On commence par observer que la fonction h de $\partial^*\mathbb{T}$ définie par :

$$h(\alpha) = \mathbb{P}[\exists n \geq 0 : L_n \alpha \in U]$$

est une fonction bornée et surharmonique. En effet :

$$\begin{aligned} P^m h(\alpha) &= \mathbb{E}[\exists n \geq 0 : L_n L_m \alpha \in U] \\ &= \mathbb{E}[\exists n \geq m : L_n \alpha \in U] \\ &\leq h(\alpha) \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à la mesure ν on voit que h est harmonique. De plus comme il existe une seule mesure invariante on peut montrer que h est ν -presque sûrement constante. Comme $h(\alpha) = 1$ pour tout $\alpha \in U$, h est égale à 1 presque partout. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[L_n \xi \in U \text{ infiniment souvent}] &= \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} [\exists k \geq n : L_k \in U]\right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\exists k \geq n : L_k \in U] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[h(L_n \alpha)] \text{ par la propriété de Markov} \\ &= h(\alpha) \text{ parce que } h \text{ est harmonique} \\ &= 1 \end{aligned}$$

pour ν -presque tout α dans $\partial^*\mathbb{T}$.

Si on suppose que U est ouvert, on peut obtenir le même résultat pour tout point de départ α , grâce à la propriété de contraction de la chaîne de Markov. En effet la distance entre deux trajectoires issues de deux points différents tend vers zéro, c'est-à-dire que presque sûrement pour tout couple de points α et ξ dans $\partial^*\mathbb{T}$

$$(2.1.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta(L_n \alpha, L_n \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{-\phi(L_n)} \Theta(\alpha, \xi) = 0$$

Soit $\gamma \in U \cap \text{supp}(\nu)$ et $\varepsilon > 0$ tel que le disque $D(\gamma, \varepsilon)$ de rayon ε et centre γ soit contenu dans U . Comme $\nu(D(\gamma, \varepsilon/2)) > 0$, il existe au moins un $\alpha \in \partial^*\mathbb{T}$ tel que, presque sûrement, $L_n \alpha$ visite $D(\gamma, \varepsilon/2)$ un nombre infini de fois ; alors puisque pour tout $\xi \in \partial^*\mathbb{T}$, grâce à (2.1.1) pour une n grand, $L_n \xi$ est à une distance plus petite que $\varepsilon/2$ de $L_n \alpha$, on aura que, presque sûrement pour tout ξ , $L_n \xi \in D(\gamma, \varepsilon) \subseteq U$ un nombre infini de fois. \square

2.2. Le cas de drift nul

L'étude du cas $\mu(\phi) = 0$ est plus délicate. On verra que comme dans le cas de drift positif la chaîne de Markov induite sur le bord est récurrente, mais sous des hypothèses de moment plus fortes. On construira une mesure de Radon invariante et on prouvera, grâce à une propriété de contraction locale, que cette mesure est unique. On verra aussi que comme dans le cas réel (cf. [BP92]) cette mesure n'a pas de masse finie.

2.2.1. Récurrence. Pour obtenir ce résultat on aura besoin d'extraire de la chaîne de Markov originale une sous-chaîne pour laquelle les résultats précédents sont valables. On considère donc les deux suites, l_k^+ and l_k^- , des temps d'échelle de la marche aléatoire $S_n = \phi(L_n)$ sur \mathbb{Z} . Ce sont les temps pour lesquels S_n atteint un nouveau maximum ou un nouveau minimum :

$$l_k^+ = \min\{n > l_{k-1}^+ : S_n > S_{l_{k-1}^+}\} \quad \text{et} \quad l_0^+ = 0$$

$$l_k^- = \min\{n > l_{k-1}^- : S_n < S_{l_{k-1}^-}\} \quad \text{et} \quad l_0^- = 0$$

On peut extraire des marches aléatoires gauche et droite, L_n et R_n , les sous-suites de variables aléatoires

$$L_{l_k^+} = \left(X_{l_k^+} \cdots X_{l_{k-1}^++1} \right) L_{l_{k-1}^+}$$

et

$$R_{l_k^+} = R_{l_{k-1}^+} \left(X_{l_{k-1}^++1} \cdots X_{l_k^+} \right)$$

qui, grâce à la propriété de Markov, sont des produits de variables aléatoires dans $\text{Aff}(\mathbb{T})$ indépendantes et de même loi. Ce sont donc encore des marches aléatoires sur le groupe affine dont les lois du pas sont les lois de $L_{l_1^+}$ et $R_{l_1^+}$ respectivement.

Évidemment le même raisonnement s'applique à $L_{l_k^-}$ et $R_{l_k^-}$. Ces sous-marches aléatoires ont l'avantage d'avoir un drift non nul, plus précisément

$$\mathbb{E}\left[\phi(L_{l_1^+})\right] = \mathbb{E}\left[\phi(R_{l_1^+})\right] > 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\phi(L_{l_1^-})\right] = \mathbb{E}\left[\phi(R_{l_1^-})\right] < 0$$

Pour pouvoir continuer, il faut savoir sous quelles hypothèses ces nouvelles marches aléatoires satisfont aux conditions nécessaires pour appliquer les propositions précédentes. Dans l'article [CKW94] on peut trouver le résultat suivant :

LEMME 2.2.1. *Le groupe fermé engendré par le support de loi de $R_{l_1^-}$ et $L_{l_1^+}$ coïncide avec le groupe fermé engendré par le support de μ .*

Si, de plus, on suppose que $\mathbb{E}[\phi(X_1)^2] < +\infty$ on a que :

- (1) *si $\mathbb{E}[|b(X_1)|^{2+\varepsilon}] < +\infty$ alors $\mathbb{E}\left[\left|R_{l_1^-}\right|\right] < +\infty$.*
- (2) *si $\mathbb{E}[|b(X_1^{-1})|^{2+\varepsilon}] < +\infty$ alors $\mathbb{E}\left[\left|L_{l_1^+}\right|\right] < +\infty$.*

DÉMONSTRATION. Le résultat 1. est la proposition 4 de [CKW94]. Le résultat 2. peut être déduit du point 1. en appliquant l'homomorphisme $x \mapsto x^{-1}$ de $\text{Aff}(\mathbb{T})$. \square

On peut remarquer que $\mathbb{E}\left[\left|R_{l_1^+}\right|\right]$ ne peut pas être fini car dans ce cas, appliquant le théorème 1.4.1, on montrerait que la marche aléatoire $R_{l_n^+}$ converge vers un bout dans $\partial^*\mathbb{T}$, tandis que étant une sous-suite de R_n elle doit converger vers ω .

Comme la sous-marche aléatoire gauche “contractante” sera un instrument technique important dans cette section, il sera utile de simplifier les notations en écrivant l à la place de l_1^+ et l_n pour l_n^+ . On notera aussi par μ_l la loi de $L_{l_1^+} = L_l$.

Cette construction permet de déduire la récurrence de la chaîne de Markov $L_n\xi$ du résultat qu'on connaît déjà dans le cas $\mu(\phi) > 0$:

PROPOSITION 2.2.2. *Supposons $\mathbb{E}[\phi(X_1)^2] < +\infty$ et $\mathbb{E}[|b(X_1^{-1})|^{2+\varepsilon}] < +\infty$. Alors pour tout ouvert U dans $\partial^*\mathbb{T}$ tel que $\nu_l(U) > 0$, où ν_l est l'unique mesure de probabilité μ_l -invariante, presque sûrement, pour tout $\xi \in \partial^*\mathbb{T}$ on a :*

$$L_n\xi \in U \text{ infiment souvent}$$

DÉMONSTRATION. Si on applique à la chaîne $L_{l_n}\xi$ la proposition 2.1.1 (les hypothèses sont satisfaites grâce au lemme précédent) on a que presque sûrement $L_{l_n}\xi \in U$ une infinité de fois, et par conséquent $L_n\xi \in U$ un nombre infini de fois. \square

2.2.2. Mesure invariante. Comme on l'a annoncé on va ici démontrer que même dans le cas de drift nul il existe une unique mesure de Radon invariante. La similitude de structure entre le groupe affine de l'arbre et de son correspondant réel va nous permettre de la construire suivant les idées que M. Babillot, Ph. Bougerol et L. Elie utilisent dans leur article [BBE97].

Existence. Comme on vient d'observer, si $\mathbb{E}[\phi(X_1)^2]$ et $\mathbb{E}\left[|b(X_1^{-1})|^{2+\varepsilon}\right]$ sont finis, la chaîne de Markov $L_{l_n}Y_0$ satisfait aux hypothèses de la Proposition 2.1.1 et possède donc une mesure de probabilité invariante ν_l . On peut alors voir, utilisant la propriété de Markov de la marche aléatoire L_n , que la mesure ν sur $\partial^*\mathbb{T}$ définie par :

$$(2.2.1) \quad \nu(f) = \frac{1}{\mathbb{E}[S_l]} \int_{\partial^*\mathbb{T}} \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{l-1} f(L_k\alpha)\right] \nu_l(d\alpha)$$

est une mesure invariante. Comme le temps d'arrêt l n'est pas intégrable, on ne peut pas immédiatement savoir si la mesure ν est une mesure de Radon, c'est-à-dire si elle est finie sur les compacts. Pour le montrer on a besoin de considérer la chaîne de Markov

$$\tilde{Y}_n = (L_n\xi, \phi(L_n) + z)$$

obtenue en regardant en même temps l'action de la marche aléatoire sur le bord $\partial^*\mathbb{T}$ et sa projection sur \mathbb{Z} , dont le noyau de transition est défini pour toute fonction f continue et bornée de $\partial^*\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$

$$\tilde{P}f(\xi, z) = \mathbb{E}[f(X_1\xi, \phi(X_1) + z)]$$

On notera par $\tilde{U} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}^n$ son noyau potentiel. Dans le cas réel la chaîne \tilde{Y}_n s'identifie à la marche aléatoire, L_n , sur le groupe, et par conséquent est transitoire. Ici comme nous allons voir dans le lemme suivant, \tilde{Y}_n ne diffère de L_n que par un facteur compact ce qui va nous permettre de déduire que \tilde{Y}_n est transiente et que son noyau \tilde{U} est fini sur les compacts.

LEMME 2.2.3. *Pour toute fonction f mesurable bornée à support compact la fonction $\tilde{U}f$ est bornée.*

DÉMONSTRATION. Il suffira de montrer le résultat dans le cas $f = 1_D \times 1_0$, où $D = D(\alpha, q^{-m})$ est un disque de $\partial^*\mathbb{T}$. On observe que, si choisit une affinité g telle que $g\alpha = \xi$ et $\phi(g) = z$ et si on note par α^m le sommet de la géodésique $\overline{\alpha\omega}$ tel que $\phi(\alpha^m) = m$, on a

$$\begin{aligned} (L_n\xi, \phi(L_n) + z) \in D(\alpha, q^{-m}) \times \{0\} &\Leftrightarrow (L_n g\alpha, \phi(L_n g)) \in D(\alpha, q^{-m}) \times \{0\} \\ &\Leftrightarrow L_n g\alpha^m = \alpha^m \end{aligned}$$

et donc, comme l'ensemble $V(\alpha^m) = \{g \in \text{Aff}(\mathbb{T}) : g\alpha^m = \alpha^m\}$ est compact,

$$\tilde{U}(1_D \times 1_0)(\xi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[L_n g \in V(\alpha^m)]$$

est borné. □

La proposition suivante va avoir comme conséquence immédiate que la mesure ν est une mesure de Radon, mais nous fournit aussi une équation de renouvellement qui nous sera utile dans le prochain chapitre.

PROPOSITION 2.2.4. *Soit ν_l une mesure de probabilité invariante pour la chaîne $Y_{l_n}^y$ et ν la mesure invariante définie comme dans (2.2.1). Il existe une mesure de probabilité ρ sur $\partial^*\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$ telle que pour toute fonction positive f supportée par $\partial^*\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_+$:*

$$(2.2.2) \quad \int_{\partial^*\mathbb{T} \times \mathbb{Z}} \tilde{U}f(\xi, z) \rho(d\xi, dz) = \int_{\partial^*\mathbb{T} \times \mathbb{Z}} f(\xi, z) \nu(d\xi) m_{\mathbb{Z}}(dz)$$

où $m_{\mathbb{Z}}$ est la mesure de Haar sur \mathbb{Z} (c'est-à-dire la mesure de comptage).

COROLLAIRE 2.2.5. *La mesure ν définie par (2.2.1) est une mesure de Radon.*

En effet d'après le lemme précédent, $\tilde{U}f$ est bornée si f est à support compact. De plus la mesure ν a masse totale infinie car si $\mu(\phi) = 0$ (cf [Spi64])

$$\nu(\partial^*\mathbb{T}) = \frac{\mathbb{E}[l]}{\mathbb{E}[S_l]} = +\infty.$$

DÉMONSTRATION. *de la Proposition 2.2.4.* On va esquisser la démonstration qui suit formellement le même schéma que la démonstration de la Proposition 2.1 dans [BBE97].

On commence par montrer qu'il existe une probabilité ρ telle que pour toute fonction mesurable non négative f de $\partial^*\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$

$$(2.2.3) \quad \int_{\partial^*\mathbb{T} \times \mathbb{Z}} \tilde{U}_l f(\xi, z) \rho(d\xi, dz) = \frac{1}{\mathbb{E}[S_l]} \int_{\partial^*\mathbb{T} \times \mathbb{Z}} f(\xi, z) 1_{[0, +\infty[} \nu_l(d\xi) m_{\mathbb{Z}}(dz)$$

où le noyau potentiel \tilde{U}_l est construit comme \tilde{U} mais à partir d'une marche aléatoire de loi de μ_l . On considère la mesure $\tilde{\nu}_l = \nu_l \times 1_{[0, +\infty[} m_{\mathbb{Z}}$ sur $\partial^*\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$, alors pour toute fonction mesurable $f = f_1 \times f_2$ non-négative on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_l \tilde{P}_l(f) &= \int_{\partial^*\mathbb{T} \times \mathbb{Z}} \mathbb{E}[f_1(L_l \xi) f_2(S_l + z) 1_{[z \geq 0]}] \nu_l(d\xi) m_{\mathbb{Z}}(dz) \\ &= \int_{\partial^*\mathbb{T} \times \mathbb{Z}} \mathbb{E}[f_1(L_l \xi) f_2(z) 1_{[z - S_l \geq 0]}] \nu_l(d\xi) m_{\mathbb{Z}}(dz) \\ &\leq \int_{\partial^*\mathbb{T} \times \mathbb{Z}} \mathbb{E}[f_1(L_l \xi) f_2(z) 1_{[z \geq 0]}] \nu(d\xi) m_{\mathbb{Z}}(dz) \quad \text{car } S_l > 0 \\ &= \int_{\partial^*\mathbb{T}} \mathbb{E}[f_1(L_l \xi)] \nu_l(d\xi) \int_{\mathbb{Z}} f_2(z) 1_{[z \geq 0]} m_{\mathbb{Z}}(dz) \\ &= \tilde{\nu}_l(f) \quad \text{car } \nu_l \text{ est } \mu_l - \text{invariante} \end{aligned}$$

Ainsi $\rho' := \tilde{\nu}_l - \tilde{\nu}_l \tilde{P}_l$ est une mesure positive. En outre pour toute fonction bornée $f = f_1 \times f_2 \in L^1(\tilde{\nu}_l)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\nu}_l \tilde{P}_l^n(f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_1\|_\infty \mathbb{E} \left[\int_{S_{l_n}}^{+\infty} f_2(z) m_{\mathbb{Z}}(dz) \right] = 0$$

et donc

$$\rho' \tilde{U} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \tilde{\nu}_l \tilde{P}^k - \tilde{\nu}_l \tilde{P}^{k+1} = \tilde{\nu}_l$$

Comme la masse totale de ρ' est $\mathbb{E}[S_l]$, la mesure de probabilité $\rho = \frac{\rho'}{\mathbb{E}[S_l]}$ vérifie l'égalité (2.2.3).

Si on considère maintenant une fonction non-négative $f = f_1 \times f_2$ telle que le support de f_2 est contenu dans \mathbb{Z}_+ , en appliquant (2.2.3) à la fonction $F(\xi, z) = \mathbb{E} \left[\sum_0^{l-1} f(L_k \xi, S_k + z) \right]$ et en procédant exactement comme dans [BBE97] on peut conclure que

$$\int_{\partial^*\mathbb{T} \times \mathbb{Z}} \tilde{U} f(\xi, z) \rho(d\xi, dz) = \int_{\partial^*\mathbb{T} \times \mathbb{Z}} \tilde{U}_l F(\xi, z) \rho(d\xi, dz) = \tilde{\nu}_l(F) = \nu(f_1) m_{\mathbb{Z}}(f_2)$$

□

Remarque. Le résultat de la proposition précédente est valable aussi si $\mathbb{E}[|X_1|]$ est fini et $\mu(\phi) > 0$. En effet on peut aussi construire la suite de temps d'échelle l_n auxquels la marche S_n atteint un nouveau maximum et dans ce cas le temps d'arrêt $l = l_1$ est intégrable (cf. [Spi64]). On peut alors aisément montrer que les conditions de moment sur la loi μ_l de la marche L_{l_n} sont vérifiées. La mesure ν construite comme dans (2.2.1) est alors de masse finie égale à

$$\nu(\partial^*\mathbb{T}) = \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{l-1} 1 \right]}{\mathbb{E}[S_l]} = \frac{\mathbb{E}[l]}{\mathbb{E}[S_l]} = \frac{1}{\mu(\phi)}$$

car $\mathbb{E}[S_l] = \mathbb{E}[\phi(X_1)] \mathbb{E}[l]$ par un résultat classique sur la somme de variables aléatoires indépendantes (cf. [Doo53]).

Unicité. Montrons maintenant que la mesure invariante qu'on a construite est la seule mesure de Radon invariante. Pour cela, nous allons voir que la chaîne de Markov possède une propriété de stabilité ou contraction locale. Plus précisément le lemme suivant montre que, bien que la distance

$$\Theta(L_n \alpha, L_n \beta) = q^{-\phi(L_n)} \Theta(\alpha, \beta)$$

ne tende pas vers zéro, L_n agit comme une contraction lorsque on ne regarde que les instants auxquels la chaîne $L_n \alpha$ revient dans un compact.

THÉORÈME 2.2.6. Si $\mu(\phi) = 0$ et $\mathbb{E}[|\phi(o \wedge X_1^{-1}o)|] < \infty$, \mathbb{P} -presque sûrement pour tout compact K de $\partial^*\mathbb{T}$ et pour tout couple $\xi, \gamma \in \partial^*\mathbb{T}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta(L_n \xi, L_n \gamma) 1_K(L_n \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{-\phi(L_n)} \Theta(\xi, \gamma) 1_K(L_n \xi) = 0$$

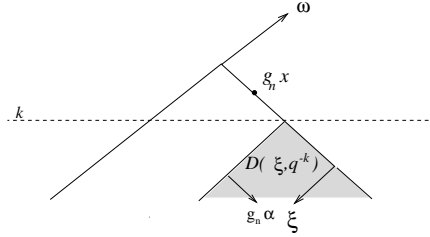
De plus la convergence est uniforme lorsque ξ et γ sont dans un compact.

DÉMONSTRATION. La preuve que nous donnons diffère de celle de [BBE97] et utilise la géométrie de l'arbre ainsi que le résultat de [CKW94] (avec les hypothèses affaiblies par le Théorème 1.4.1) qui nous garantit que \hat{R}_n converge vers ω .

On commence par montrer que si $\{g_n\}_n$ est une suite dans $\text{Aff}(\mathbb{T})$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \omega$

$$(2.2.4) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ g_n \alpha \in D(\xi, q^{-k})}} \phi(g_n) = +\infty$$

où $D(\xi, q^{-k}) = \{y \in \mathbb{T} \cup \partial^*\mathbb{T} : \phi(y \wedge \xi) \geq k\}$. En effet si x est le sommet de la géodésique $\overline{\xi\omega}$ tel que $\phi(x) = 0$, comme $g_n x \rightarrow \omega$ on a en particulier que pour n suffisamment grand $g_n x \notin D(\xi, q^{-k})$. D'autre part on peut voir facilement que si on a en même temps $g_n \alpha \in D(\xi, q^{-k})$ et $g_n x \notin D(\xi, q^{-k})$ alors $g_n x \in \overline{\xi\omega}$, et donc $g_n x = g_n x \wedge \xi$.



On peut alors conclure que

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ g_n \alpha \in D(\xi, q^{-k})}} \phi(g_n) &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ g_n \alpha \in D(\xi, q^{-k})}} \phi(g_n x) \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ g_n \alpha \in D(\xi, q^{-k})}} \phi(g_n x \wedge \xi) \\ &= -\infty \quad \text{car } g_n x \rightarrow \omega. \end{aligned}$$

On va appliquer ce résultat à la marche aléatoire \hat{R}_n afin de montrer que pour tout k , \mathbb{P} -presque sûrement :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^{-\phi(L_n)} 1_{D(\alpha, q^{-k})}(L_n \xi) = 0.$$

On observe d'abord que

$$\begin{aligned} \Theta(L_n \xi, \alpha) &= q^{-\phi(L_n)} \Theta(\xi, L_n^{-1} \alpha) \\ &= q^{-\phi(L_n)} \Theta(\xi, \hat{R}_n \alpha) \end{aligned}$$

Par conséquent le fait que $L_n\xi$ soit dans le disque $D(\alpha, q^{-k})$ équivaut à demander que $\hat{R}_n\alpha$ soit dans un disque de centre ξ et de rayon convenable

$$L_n\xi \in D(\alpha, q^{-k}) \Leftrightarrow \hat{R}_n\alpha \in D(\xi, q^{-k+\phi(L_n)}).$$

On fixe maintenant un nombre $\varepsilon > 0$ et on calcule la limite en séparant entre les cas où $q^{-\phi(L_n)}$ est plus grand ou plus petit que ε :

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} q^{-\phi(L_n)} 1_{D(\alpha, q^{-k})}(L_n\xi) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} q^{-\phi(L_n)} 1_{D(\xi, q^{-k+\phi(L_n)})}(\hat{R}_n\alpha) \\ &\leq \varepsilon + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 1_{[q^{-\phi(L_n)} > \varepsilon]} q^{-\phi(L_n)} 1_{D(\xi, q^{-k+\phi(L_n)})}(\hat{R}_n\alpha) \\ &\leq \varepsilon + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} q^{-\phi(L_n)} 1_{D(\xi, q^{-k-\log_q \varepsilon})}(\hat{R}_n\alpha) \\ &\leq \varepsilon + 0 \end{aligned}$$

presque sûrement, car le Théorème 1.4.1 garantit que $\hat{R}_n \rightarrow \omega$ et on peut donc lui appliquer (2.2.4). Le choix de ε étant arbitraire, on conclut. \square

La propriété de contraction locale est celle que nous garantit l'unicité d'une mesure invariante. On a effectivement le théorème suivant, qui résume et complète le résultat concernant les mesures μ -excessives dans les cas où la chaîne est récurrente.

THÉORÈME 2.2.7. *Si*

$$\mathbb{E}[|X_1|] < \infty \text{ et } \mu(\phi) > 0$$

ou bien si

$$\mathbb{E}[\phi(X_1)^2] + \mathbb{E}[|b(X_1^{-1})|^{2+\varepsilon}] < \infty \text{ et } \mu(\phi) = 0$$

il existe une unique mesure de Radon μ -excessive (à une constante multiplicative près) et elle est μ -invariante.

De plus pour tout couple de fonctions $f, g \in C_c(\partial^\mathbb{T})$ tel que $g \geq 0$ et $\nu(g) > 0$ \mathbb{P} -presque sûrement*

$$(2.2.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n f(L_k\xi_1)}{\sum_{k=0}^n g(L_k\xi_2)} = \frac{\nu(f)}{\nu(g)} \text{ pour tout } \xi_1, \xi_2 \in \partial^*\mathbb{T}.$$

DÉMONSTRATION. La démonstration se base sur le théorème de Chacon-Ornstein et suit exactement le même schéma que son équivalent dans le cas réel qu'on démontrera dans le Théorème 5.3.2. Bien que ce théorème soit énoncé seulement dans le cas des mesures invariantes, il reste vrai sans modifications essentielles dans la preuve pour des mesures excessives. \square

2.2.3. Un théorème ergodique. On conclut ici l'étude de la chaîne induite sur le bord dans le cas de drift nul en montrant un théorème ergodique "en mesure infinie". Le théorème suivant donne une estimée asymptotique (aléatoire) du nombre de visites dans un ensemble K de mesure finie, tout comme dans le cas où on a une probabilité stationnaire ν , le théorème ergodique nous garantit que $\sum_{k=0}^n 1_K(L_k\xi)$ équivaut à $n\nu(K)$, lorsque le temps n tend vers l'infini.

PROPOSITION 2.2.8. *Si*

$$\mu(\phi) = 0 \text{ et } \mathbb{E}[\phi(X_1)^2] + \mathbb{E}\left[|b(X_1^{-1})|^{2+\varepsilon}\right] + \mathbb{E}\left[|o \wedge X_1 o| q^{|o \wedge X_1^{-1} o|}\right] < \infty$$

alors pour toute fonction $f : \partial^* \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact, \mathbb{P} -presque sûrement pour tout $\xi \in \partial^* \mathbb{T}$:

$$(2.2.6) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{M_n} \sum_{k=0}^n f(L_k \xi) = \nu(f)$$

où $M_n = \max\{S_k : 0 \leq k \leq n\}$ et ν est la mesure invariante définie par (2.2.1).

DÉMONSTRATION. [cf. théorème 4.1 de [BBE97]] Montrons d'abord que lorsque la variable Y_0 a loi ν_l pour toute $f \in L^1(\nu)$:

$$(2.2.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{l_n-1} f(L_k Y_0) = \mathbb{E}[S_l] \nu(f)$$

\mathbb{P}_{ν_l} -presque sûrement. Soit

$$V_n = \sum_{k=l_n}^{l_{n+1}-1} f(L_k Y_0) = \sum_{k=l_n}^{l_{n+1}-1} f(Y_k).$$

On observe que si note, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, θ^k l'application sur l'espace des trajectoires telle que $\theta^k(Y_i) = Y_{i+k}$, on a que $V_{n+k} = V_n \circ \theta^{l_n}$. On montrera que, sous \mathbb{P}_{ν_l} , $\{V_n\}_n$ est une suite de variables aléatoires stationnaires et ergodique ; le théorème de Birkhoff nous permettra donc de conclure que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{l_n-1} f(L_k Y_0) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} V_r$ converge vers $\mathbb{E}_{\nu_l}[V_0] = \mathbb{E}[S_l] \nu(f)$.

On montre tout d'abord la stationnarité : en effet si $G : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable bornée, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\nu_l}[G(V_n, V_{n+1}, \dots)] &= \mathbb{E}_{\nu_l}[\mathbb{E}[G(V_0 \circ \theta^{l_n}, V_1 \circ \theta^{l_n}, \dots) \mid \mathcal{F}_{l_n}]] \\ &= \mathbb{E}_{\nu_l}[\mathbb{E}_{Y_{l_n}}[G(V_0, V_1, \dots)]] \text{ par la propriété de Markov} \\ &= \mathbb{E}_{\nu_l}[G(V_0, V_1, \dots)] \text{ car } Y_{l_n} \text{ est stationnaire.} \end{aligned}$$

Pour déterminer l'ergodicité de la suite V_n on montrera qu'une variable aléatoire Z bornée, invariante et $\sigma(V_n, n \in \mathbb{N})$ -mesurable est presque sûrement constante. Pour une telle variable aléatoire, on peut trouver une fonction $G : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $Z = G(V_n, V_{n+1}, \dots)$ ainsi on a que $Z = G(V_{n+k}, V_{n+k+1}, \dots) = Z \circ \theta^{l_n}$ et que $\mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}_{l_n}] = \mathbb{E}_{Y_{l_n}}[Z]$. Par le théorème de martingales on a aussi que $Z = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}_{l_n}]$, Z est une variable aléatoire mesurable et invariante pour la suite ergodique de variables aléatoire $\{Y_{l_n}\}_n$ et est donc constante.

Si $\sigma_n := \max\{k : l_k \leq n\}$ alors \mathbb{P}_{ν_l} -presque sûrement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=0}^n f(L_k Y_0) = \mathbb{E}[S_l] \nu(f).$$

D'autre part puisque $M_{l_{\sigma_n}} = M_n$ et que, comme $M_{l_n} = S_{l_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{l_n}}{n} = \mathbb{E}[S_l]$, on peut montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{M_n} \sum_{k=1}^n f(L_k Y_0) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{M_{l_{\sigma_n}}} \frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^n f(L_k Y_0) = \nu(f)$$

\mathbb{P}_{ν_l} -presque sûrement. En particulier il existe au moins un $\xi \in \partial^*\mathbb{T}$ tel que \mathbb{P} -presque sûrement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{M_n} \sum_{k=1}^n f(L_k \xi) = \nu(f)$$

et on peut conclure en appliquant (2.2.5). □

CHAPITRE 3

Renouvellement et frontière de Martin

Le but de ce chapitre est caractériser les points d'accumulation du noyau potentiel $\{U(g, \cdot)\}_{g \in \Gamma}$ et du noyau de Martin $\{K(g, \cdot)\}_{g \in \Gamma}$ lorsque g converge vers le point à l'infini de la compactification d'Alexandroff de Γ . On montrera, sous des hypothèses de régularité adéquates, que ces deux noyaux peuvent être prolongés par continuité au bord du groupe vu comme sous-ensemble du bord de l'arbre et on déterminera la forme explicite des mesures limites (Théorèmes 3.1.11, 3.2.1 et 3.1.9). On pourra en déduire une représentation intégrale de l'ensemble des mesures μ -invariantes (Corollaire 3.2.2) et, dans le cas de drift nul, l'existence et l'unicité d'une mesure bi-invariante, ce qui nous sera utile dans le chapitre suivant pour le théorème local (Proposition 3.3.1).

Si on définit par $U = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{(n)}$ la mesure potentiel, le noyau potentiel (pour la marche droite) est

$$U(g, \cdot) = g * U(\cdot).$$

Puisque les marches aléatoires sur Γ sont transientes, ce noyau décrit, lorsque g varie dans Γ , une famille de mesures de Radon relativement compacte pour la topologie de la convergence vague (cf. [Rev75]) et les points d'accumulation, lorsque g tend vers l'infini, sont des mesures de Radon μ -*excessives* (à droite), c'est-à-dire vérifiant l'inégalité $\nu * \mu \leq \nu$. L'étude du renouvellement consiste à analyser ces mesures, en déterminant les limites et les directions de convergence. Les résultats classiques pour les groupes abéliens (qui assurent que les points d'accumulation sont au plus deux (la mesure nulle et la mesure de Haar) et qu'on peut avoir une limite non nulle si et seulement si le groupe est une extension compacte de \mathbb{Z} ou \mathbb{R}) ont été généralisés à d'autres classes de groupes (nilpotents, croissance polynômiale...), où la non-commutativité n'est pas assez forte pour affecter les propriétés asymptotiques de U . Les travaux de L.Elle sur le groupe affine de la droite réelle ou plus généralement sur les groupes de Lie presque connexes ([Éli77] et [Éli82]) ont permis de montrer que, dans le cas des groupes non-unimodulaires, on a des comportements assez différents (entre autres on peut avoir un nombre infini de mesures limites, dont les mesures de Haar ne font pas partie). Dans notre étude on va développer quelques unes des idées de ces articles dans le cadre des transformations affines de l'arbre, en sortant du contexte de groupes de Lie pour travailler sur un groupe totalement discontinu. On devra également faire face à des nouveaux problèmes de non-commutativité.

Afin de simplifier l'exposé, on supposera dans ce chapitre que Γ agit transitivement sur l'arbre, mais cette hypothèse peut être supprimée, avec les dus changements, pour plusieurs résultat.

On aura besoin de supposer que μ satisfait à des hypothèses de régularité, qui dépendront des résultats qu'on veut obtenir. Pour certains sous-groupes particuliers de $\text{Aff}(\mathbb{T})$, et notamment pour le groupe $\text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$, on peut prouver la convergence du noyau potentiel dans certains directions significatives sous des hypothèses de moment comme dans le chapitre précédent, donc sans hypothèses de densité ou d'étalement. On observe que l'on pourra appliquer ces résultats à des marches aléatoires dont la loi ne charge que des transformations affines à coefficients rationnels; en particulier en plongeant $\text{Aff}(\mathbb{Q})$ dans $\text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$, on pourra obtenir des résultats de renouvellement pour toute une classe des mesures, pour lesquelles on n'aurait pu rien dire en les regardant comme marches aléatoires dans le groupe des affinités réelles (Corollaire 3.1.10). Pour des groupes plus généraux, on aura besoin que μ soit *étalée* (i.e. la mesure $U = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{(n)}$ est non-singulière par rapport à la mesure de Haar de Γ).

Étant donnée une fonction v fixée dans $C_c^+(\Gamma)$ non nulle, on peut définir le noyau de Martin par

$$K_v(g, \cdot) = \frac{U(g, \cdot)}{U(g, v)}$$

Si on suppose que le semi-groupe fermé engendré par le support de μ est le groupe Γ (i.e. μ est *irréductible*) et que μ admet une densité continue à support compact par rapport à la mesure de Haar de Γ , alors cette famille de mesures est relativement compacte, grâce à la transience de la marche, et l'ensemble des points d'accumulation ne dépend pas du choix de la fonction v (quitte à multiplier pour une constante de normalisation). La *frontière de Martin* (qui est alors l'ensemble des mesures limites obtenues lorsque g tend vers l'infini) est constituée de mesures μ -invariantes (à droite), $\nu * \mu = \nu$, et parmi elles on trouve toutes les mesures invariantes *extremales*, c'est-à-dire qui ne peuvent pas être écrites comme barycentre d'autres mesures invariantes. Toute mesure invariante est alors une moyenne des mesures de la frontière de Martin et cette représentation intégrale est unique lorsque on se restreint aux mesures extremales.

Si Γ agit transitivement sur l'arbre, on a vu qu'on peut compactifier le groupe Γ avec les extrémités de l'arbre $\partial\mathbb{T}$ de sorte que

$$g_n \rightarrow \alpha \Leftrightarrow g_n x \rightarrow \alpha \text{ pour un (ou tout) } x \in \mathbb{T}.$$

W. Woess a montré que la frontière de Martin coïncide avec ce bord géométrique naturel et on a

THÉORÈME 3.0.9. [Woe95] *Si μ est irréductible et a une densité continue à support compact et ouvert alors la frontière de Martin coïncide avec $\partial\mathbb{T}$, c'est-à-dire qu'on peut prolonger par continuité le noyau K_v sur $\partial\mathbb{T}$. De plus pour $\alpha \neq \beta \in \partial\mathbb{T}$, on a $K_v(\alpha, \cdot) \neq K_v(\beta, \cdot)$ et les mesures $K_v(\alpha, \cdot)$ sont les mesures invariantes extremales.*

Ce résultat vaut en général pour des marches aléatoires sur le groupe des isométries de l'arbre ; comme indiqué plus haut, on va l'améliorer, dans le cas du groupe affine en donnant une forme explicite aux mesures $K(\alpha, \cdot)$, ce qui nous permettra de donner une représentation intégrale des mesures invariantes.

3.1. Mesures limites du noyau potentiel

Pour étudier les mesures limites du noyau potentiel, on utilisera souvent le résultat suivant d'uniforme continuité du noyau potentiel (cf. [Éli82], Proposition 2.7 et Théorème 2.9)

LEMME 3.1.1. *Soit $\{g_n\}_n$ une suite d'éléments de Γ telle que $U(g_n, \cdot)$ converge vaguement.*

- (1) *Continuité à gauche. Il existe une sous-suite $\{g_{n_k}\}_k$ telle que, pour tout $y \in \Gamma$, les suites des mesures $yg_{n_k} * U$ convergent vaguement. De plus, pour toute $f \in C_c(\Gamma)$, les suites $yg_{n_k} * U(f)$ convergent uniformément en y , lorsque y varie dans un compact.*
- (2) *Continuité à droite. Si μ est étalée, il existe une sous-suite $\{g_{n_k}\}_k$ telle que, pour tout $y \in \Gamma$, les suites $g_{n_k}y * U$ convergent vaguement. De plus, pour toute $f \in C_c(\Gamma)$, $g_{n_k}y * U(f)$ converge uniformément en y , lorsque y varie dans un compact.*

On observe que la continuité à gauche est assez immédiate, tandis que la convergence à droite est un phénomène plus subtil qui requiert l'hypothèse d'étalement. Ce lemme implique en particulier que lorsque on perturbe g_n (à droite ou à gauche) par une suite y_n qui converge vers y alors on peut se restreindre à une sous-suite pour laquelle la limite ne change pas si on échange entre eux y et y_n ; par exemple

$$(3.1.1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k} y_{n_k} * U(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k} y * U(f)$$

Puisque les mesures limites vont avoir des structures différentes selon qu'elles sont limites dans un voisinage de ω ou bien qu'on regarde le voisinage d'un point du bord $\partial^* \mathbb{T}$, on va analyser les deux cas séparément.

3.1.1. Limites vers $\partial^* \mathbb{T}$. On commence par démontrer quelques propriétés d'invariance pour les points d'accumulation du noyau potentiel. Entre autres on va exhiber des *périodes* pour les mesures limites ν , c'est-à-dire des éléments γ du groupe Γ tels que

$$\gamma * \nu = \nu$$

Ce résultat nous permettra de donner une forme explicite des mesures limites à une constante multiplicative près. Enfin, en supposant que la mesure μ admet un moment on montrera que le noyau potentiel peut être prolongé par continuité sur $\partial^* \mathbb{T}$.

On commence par montrer quelques résultats qui précisent le comportement des affinités de l'arbre au voisinage des points du bord.

LEMME 3.1.2. *On fixe $\alpha \in \partial^*\mathbb{T}$ et $s \in \Gamma$ tels que $s\alpha = \alpha$ et $\phi(s) = 1$. Pour tout $g \in \Gamma$ la suite $\{s^n g s^{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte et tous ses points d'accumulation fixent α . De plus si $g \in \text{Hor}(\Gamma)$ les points d'accumulation appartiennent à K_α .*

DÉMONSTRATION. On commence par observer que pour tout $g \in \Gamma$

$$(3.1.2) \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta(\alpha, s^n g s^{-n} \alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta(s^n \alpha, s^n g \alpha) && \text{car } s^n \alpha = \alpha \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} q^{-n} \Theta(\alpha, g \alpha) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme de plus $\phi(s^n g s^{-n}) = \phi(g)$, cela implique que la suite $s^n g s^{-n}$ est dans un ensemble compact de Γ et que tous ses points d'accumulation fixent l'extrémité α . De plus si $g \in \text{Hor}(\Gamma)$, tous les éléments de la suite sont dans $\text{Hor}(\Gamma)$ et donc les points d'accumulation sont dans K_α . \square

Pour certains groupes Γ qui agissent de manière assez homogène sur l'arbre la suite $s^n g s^{-n}$ converge et la limite ne dépend que de la partie "rotation" de $g \in \text{Hor}(\Gamma)$. Par exemple si $\Gamma = \text{Hor}(\mathbb{Q}_p)$, pour tout $g = (a, x) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Q}_p = \text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$, la suite $s^n g s^{-n}$ converge vers a , tandis que si $\Gamma = \text{Aff}(\mathbb{Z}_q)$, pour tout $b \in \text{Hor}(\Gamma)$ la suite $s^n b s^{-n}$ converge vers l'identité. Ceci est faux dans le cas général, mais le lemme suivant permet d'approcher les points d'accumulation de la suite $s^n b s^{-n}$ avec des suites du type $s^{n_k} r_k s^{-n_k}$ où r_k est une suite qui converge vers une rotation.

LEMME 3.1.3. *Soit $\mathbf{n} = \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{Z} telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$ alors pour tout $b \in \text{Hor}(\Gamma)$ il existe une suite $\{r_l\}_l$ qui converge vers un élément de K_α et une sous-suite $\mathbf{n}'' \subseteq \mathbf{n}$ telles que*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} s^{n''_l} b^{-1} r_l s^{-n''_l} = e$$

DÉMONSTRATION. Grâce au lemme précédent on sait qu'il existe une sous-suite $\mathbf{n}' \subseteq \mathbf{n}$ telle que $s^{n'_k} b s^{-n'_k}$ converge et est donc une suite de Cauchy i.e. :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(s^{n'_k} b s^{-n'_k} \right)^{-1} s^{n'_{k+i}} b s^{-n'_{k+i}} = e$$

uniformément pour $i \in \mathbb{N}$. Soit i_k une suite de nombres naturels telle que $n'_{k+i_k} - n'_k$ converge vers $+\infty$, lorsque k tend vers $+\infty$. D'après le Lemme 3.1.2 la suite

$$b_k = s^{n'_{k+i_k} - n'_k} b s^{-(n'_{k+i_k} - n'_k)}$$

est relativement compacte et on peut extraire une sous-suite convergente; soit donc

$$r = \lim_{l \rightarrow \infty} b_{k_l}.$$

On a alors que $r\alpha = \alpha$ et de plus

$$\lim_{l \rightarrow \infty} s^{n'_{k_l}} b^{-1} b_{k_l} s^{-n'_{k_l}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(s^{n'_{k_l}} b s^{-n'_{k_l}} \right)^{-1} s^{n'_{k_l+i_{k_l}}} b s^{-n'_{k_l+i_{k_l}}} = e,$$

donc on pose $n_l'' = n_{k_l}'$ et $r_l = b_{k_l}$ et on conclut. \square

Ce lemme avec les propriétés d'uniforme continuité du noyau potentiel dues à l'étalement permet de déterminer certaines propriétés d'invariance des mesures limites.

PROPOSITION 3.1.4. *Supposons que μ est une mesure étalée sur Γ . Soit g_n une suite de Γ qui converge vers $\alpha \in \partial^*\mathbb{T}$ et telle que $U(g_n, \cdot)$ converge vaguement vers ν . Alors*

(1) *il existe une sous-suite $\{g_{n_k}\}_k$ telle que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k} g * U = \nu \quad \text{pour tout } g \in \Gamma$$

(2) *tous les éléments de Γ qui fixent α sont périodes de ν .*

(3) *si $s \in \Gamma$ est tel que $s\alpha = \alpha$ et $\phi(s) = 1$*

$$(3.1.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U(g_n, \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(s^{\phi(g_n)}, \cdot).$$

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que $g_k = s^{n_k}$ avec $s \in \Gamma$ tel que $s\alpha = \alpha$ et $\phi(s) = 1$.

1. Quitte à se restreindre à une sous-suite, on sait que la famille des mesures de Radon

$$\nu_g = \lim_{k \rightarrow \infty} s^{n_k} g * U$$

est bien définie pour tout $g \in \Gamma$ et varie continuellement avec g . On considère le groupe

$$P = \{b \in \text{Hor}(\Gamma) : \forall g \in \Gamma \nu_{bg} = \nu_g\}.$$

Montrons que P est un sous-groupe distingué de Γ . En effet, si $\gamma \in \Gamma$ et si on se restreint à une sous-suite pour laquelle $s^{n'_k} \gamma s^{-n'_k}$ converge vers γ' , on a pour tout $b \in P$:

$$\begin{aligned} \nu_{\gamma b \gamma^{-1} g} &= \lim_{k \rightarrow \infty} s^{n'_k} \gamma b \gamma^{-1} g * U \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} s^{n'_k} \gamma s^{-n'_k} * s^{n'_k} b \gamma^{-1} g * U \\ &= \gamma' * \lim_{k \rightarrow \infty} s^{n'_k} b \gamma^{-1} g * U \quad \text{grâce à l'uniforme continuité à gauche} \\ &= \gamma' * \nu_{b \gamma^{-1} g} \\ &= \gamma' * \nu_{\gamma^{-1} g} \\ &= \gamma' * \gamma'^{-1} * \nu_g \quad \text{grâce à l'uniforme continuité à gauche} \\ &= \nu_g \end{aligned}$$

et donc $\gamma b \gamma^{-1} \in P$.

P est fermé grâce à la continuité et on va montrer que $P \setminus \text{Hor}(\Gamma)$ est compact. En effet grâce au lemme précédent pour tout $b \in \text{Hor}(\Gamma)$ on peut trouver une suite

r_k qui converge vers un élément $r \in K_\alpha$ et une sous-suite telle que $s^{n'_k} b^{-1} r_k s^{-n'_k}$ converge vers l'identité. On a alors que

$$\begin{aligned}
\nu_{b^{-1}r} g &= \lim_{k \rightarrow \infty} s^{n'_k} b^{-1} r g * U \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} s^{n'_k} b^{-1} r_k g * U \quad \text{grâce à l'uniforme continuité à droite} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} s^{n'_k} b^{-1} r_k s^{-n'_k} * s^{n'_k} g * U \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} s^{n'_k} g * U \quad \text{puisque } s^{n'_k} b^{-1} r_k s^{-n'_k} \rightarrow e \\
&= \nu_g
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $b^{-1}r \in P$, ou encore, chaque classe Pb admet un représentant r dans K_α . Soit maintenant $\{Pb_l\}_l$ une suite dans $P \setminus \text{Hor}(\Gamma)$; si on choisit les b_l dans le compact K_α , on peut extraire une sous-suite b_{l_i} convergente et, puisque P est fermé, aussi Pb_{l_i} converge dans $P \setminus \text{Hor}(\Gamma)$, qui est donc compact.

Cela va entraîner que pour tout $g \in \Gamma$ les mesures ν_g coïncident avec ν . En effet, on fixe $f \in C_c(\Gamma)$ et on définit la fonction h sur

$$h(g) = \nu_g(f)$$

On observe que h est bornée car $U(\cdot, f)$ l'est, qu'elle est continue par l'uniforme continuité à droite de $U(\cdot, f)$ et qu'elle est μ -harmonique à droite car

$$\begin{aligned}
h * \mu(g) &= \int_{\Gamma} \lim_{k \rightarrow \infty} s^{n_k} g \gamma * U(f) \mu(d\gamma) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} s^{n_k} g \gamma * U(f) \mu(d\gamma) \quad \text{par convergence dominée} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} s^{n_k} g * \sum_{i=0}^{\infty} \mu^{(i)} * \mu(f) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} s^{n_k} g * \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{(i)}(f) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} s^{n_k} g * U(f) - f(s^{n_k} g) \\
&= h(g) \quad \text{car } f \text{ est à support compact}
\end{aligned}$$

Comme h est invariante par P , elle induit une fonction sur $P \setminus \Gamma$:

$$\bar{h}(Pg) = h(g)$$

qui est harmonique pour la mesure $\bar{\mu}$ obtenue par projection de μ sur $P \setminus \Gamma$. Puisque $P \setminus \text{Hor}(\Gamma)$ est compact et

$$(P \setminus \text{Hor}(\Gamma)) \setminus (P \setminus \Gamma) \cong \text{Hor}(\Gamma) \setminus \Gamma \cong \mathbb{Z},$$

on sait que, comme dans le cas classique de \mathbb{Z} , les fonctions harmoniques continues bornées sur $P \setminus \Gamma$ sont constantes (cf. Théorème V.2 [Gui73]). Donc \bar{h} (et h) est

constante et on conclut que

$$\nu_g = \nu_1 = \nu \quad \forall g \in \Gamma.$$

Ceci prouve 1, lorsque $g_k = s^{n_k}$.

2. On peut maintenant montrer que tout $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma\alpha = \alpha$ est période de la mesure limite ν . On observe d'abord que puisque γ fixe α la suite, $s^{-n_k}\gamma s^{n_k}$ est relativement compacte, car $s^{-n_k}\gamma s^{n_k}\alpha = \alpha$ et $\phi(s^{-n_k}\gamma s^{n_k}) = \phi(\gamma)$ (on est ici dans la situation "opposée" à celle du Lemme 3.1.2, dans lequel on montre que $s^{n_k}\gamma s^{-n_k}$ est relativement compacte). Soit $s^{-n'_k}\gamma s^{n'_k}$ une sous-suite qui converge vers γ' on a alors

$$\gamma * \nu = \lim_{k \rightarrow \infty} s^{n'_k} \left(s^{-n'_k} \gamma s^{n'_k} \right) * U = \nu_{\gamma'} = \nu$$

3. Si maintenant g_k est une suite quelconque qui converge vers α on peut la décomposer en $g_k = b_k s^{n_k}$ avec $b_k \in \text{Hor}(\Gamma)$. On a alors que n_k converge vers $+\infty$ et que $b_k\alpha = g_k\alpha$ converge vers α , et donc la suite b_k est relativement compacte. Pour toute sous-suite pour laquelle $s^{n_k}g * U$ converge on peut extraire une sous-suite le long de laquelle b_{k_l} converge vers un élément r de K_α et alors :

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} g_{k_l} g * U &= \lim_{l \rightarrow \infty} b_{k_l} * s^{n_{k_l}} g * U \\ &= r * \lim_{l \rightarrow \infty} s^{n_{k_l}} g * U \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} s^{n_{k_l}} g * U \quad \text{car } r\alpha = \alpha \end{aligned}$$

Donc $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k g * U = \lim_{k \rightarrow \infty} s^{n_k} g * U$ et on peut se ramener au cas précédent \square

L'hypothèse d'étalement dans la proposition précédente n'est pas nécessaire lorsque la mesure μ charge des groupes Γ qui agissent de façon assez homogène sur l'arbre \mathbb{T} . En particulier ceci est le cas du groupe affine p -adique et de $\text{Aff}(\mathbb{Z}_q)$.

PROPOSITION 3.1.5. *Supposons que Γ soit contenu dans $\text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$ ou dans $\text{Aff}(\mathbb{Z}_q)$. Soit g_n une suite de Γ qui converge vers $\alpha \in \partial^*\mathbb{T}$ et telle que $U(g_n, \cdot)$ converge vers ν . Alors*

(1) pour tout $g \in \Gamma$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n g * U = \nu$$

(2) tous les éléments de Γ qui fixent α sont périodes de ν .

(3) si $s \in \Gamma$ est tel que $s\alpha = \alpha$ et $\phi(s) = 1$

$$(3.1.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U(g_n, \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(s^{\phi(g_n)}, \cdot).$$

DÉMONSTRATION. La preuve suit le même schéma que celle de la Proposition précédente, en faisant juste attention que, à priori, on a pas de continuité à droite du noyau potentiel.

Dans les cas considérés, il existe deux sous-groupes fermés, T et A , de Γ tels que

- (1) $\Gamma = T \rtimes A$
- (2) A est abélien et il existe $s \in A$ tel que $\phi(s) = 1$
- (3) pour tout $t \in T$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s^n t s^{-n} = e$$

Si $\Gamma \subseteq \text{Aff}(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p^* \times \mathbb{Q}_p$ on peut trouver $T \subseteq \mathbb{Q}_p$ et $A \subseteq \mathbb{Q}_p^*$, si $\Gamma \subseteq \text{Aff}(\mathbb{Z}_q)$, alors $T \subseteq \mathbb{Z}_q$ et $A \subseteq \mathbb{Z}$.

Supposons que $s\alpha = \alpha$ (c'est-à-dire que α est le zéro de \mathbb{Q}_p ou de \mathbb{Z}_q) et $g_k = s^{n_k}$. Pour toute fonction $f \in C_c(\Gamma)$ et tout $a \in \Gamma$, la suite $\{U(s^{n_k}g, f)\}_k$ est relativement compacte dans \mathbb{R} . Pour toute sous-suite convergente on a

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} U(s^{n'_k}g, f) &= \lim_{k \rightarrow \infty} s^{n'_k} t s^{-n'_k} s^{n'_k} a * U(f) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} s^{n'_k} a * U(f) \quad \text{par la continuité à gauche} \\ &= a * \lim_{k \rightarrow \infty} s^{n'_k} * U(f) \quad \text{car } A \text{ est abélien} \\ &= a * \nu(f) \end{aligned}$$

Donc la suite $U(s^{n_k}g, f)$ converge, elle aussi, vers $a * \nu(f)$ et on peut définir la fonction

$$h(g) = \lim_{k \rightarrow \infty} U(s^{n_k}g, f) = a * \nu(f),$$

qui est une fonction continue (car $a * \nu(f)$ l'est), harmonique et bornée. Comme elle peut être projetée sur une fonction de A , harmonique pour la marginale de μ sur A , elle est constante par le Théorème de Choquet-Deny. Ceci conclut la preuve de 1. On a aussi que

$$\nu(f) = a * \nu(f) \quad \text{pour tout } a \in A;$$

puisque, dans les cas considérés, A est le stabilisateur de α , on a montré aussi le point 2. On prouve 3. et le cas où g_n est une suite quelconque qui converge vers α comme dans la proposition précédente.

Si g_n converge vers une autre extrémité β on peut se ramener à ce cas en conjuguant par un élément du groupe qui envoie α sur β . \square

Caractérisation. On peut maintenant donner une caractérisation des points d'accumulation du noyau potentiel au voisinage de $\partial^*\mathbb{T}$. Cette caractérisation sera donnée en regardant $\text{Aff}(\mathbb{T})$ comme produit semi-direct de \mathbb{Z} et $\text{Hor}(\mathbb{T})$; cette décomposition dépend du choix de l'homothétie s et donc le bout $\alpha \in \partial^*\mathbb{T}$ tel que $s\alpha = \alpha$ jouera le rôle du centre du bord de l'arbre. On commence par donner un premier résultat qui ne requiert pas d'hypothèses de moment.

PROPOSITION 3.1.6. *Supposons μ étalée ou bien Γ contenu dans $\text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$ ou dans $\text{Aff}(\mathbb{Z}_q)$. Soit $\{g_n\}_n$ une suite dans Γ qui converge vers $\beta \in \partial^*\mathbb{T}$ et telle que $U(g_n, \cdot)$ converge vaguement vers ν . Alors pour tout $b \in \Gamma$ tel que $b\beta = \alpha$ on a :*

$$\hat{\nu} = (\overline{m} \times m_{\mathbb{Z}}) * b$$

où $m_{\mathbb{Z}}$ est la mesure de Haar de \mathbb{Z} et \overline{m} une mesure $\hat{\mu}$ -excessive sur $\text{Hor}(\Gamma)$ (éventuellement nulle) invariante par K_{α} .

DÉMONSTRATION. On commence par supposer $\beta = \alpha$, alors grâce à la Proposition 3.1.4 on sait que ν est invariante pour l'action à gauche de s , et donc $\hat{\nu} * s^{\phi} = \hat{\nu}$, pour tout $\phi \in \mathbb{Z}$. Si on identifie Γ avec le produit semi-direct $\text{Hor}(\Gamma) \rtimes_s \mathbb{Z}$ par l'homomorphisme qui envoie (b, ϕ) sur bs^{ϕ} , on a alors que pour toute fonction fixée $h \in C_c(\text{Hor}(\Gamma))$ la mesure de Radon de \mathbb{Z} définie par

$$f \mapsto \hat{\nu}(h \times f)$$

est un multiple de la mesure de Haar, $m_{\mathbb{Z}}$. On peut donc conclure que

$$\hat{\nu} = \overline{m} \times m_{\mathbb{Z}}$$

pour une mesure de Radon \overline{m} sur $\text{Hor}(\Gamma)$. Cette mesure \overline{m} est $\hat{\mu}$ -excessive car

$$\begin{aligned} \hat{\mu} * \overline{m}(f) &= \int_{\Gamma} \int_{\text{Hor}(\Gamma)} f(b(g)s^{\phi(g)}bs^{-\phi(g)}) \hat{\mu}(dg) \overline{m}(db) \\ &= \int_{\Gamma} \int_{\text{Hor}(\Gamma)} f(b(g)s^{\phi(g)}bs^{-\phi(g)}) \int_{\mathbb{Z}} 1_{\{0\}}(\phi + \phi(g)) m_{\mathbb{Z}}(d\phi) \hat{\mu}(dg) \overline{m}(db) \\ &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} f \times 1_{\{0\}}(gx) \hat{\mu}(dg) \hat{\nu}(dx) \\ &\leq \hat{\nu}(f) \quad \text{car } \hat{\nu} \text{ est } \hat{\mu} \text{-excessive} \\ &= \overline{m}(f) m_{\mathbb{Z}}(0) = \overline{m}(f) \end{aligned}$$

Pour un $\beta \in \partial^* \mathbb{T}$ arbitraire, on doit juste observer que si on choisit $b \in \Gamma$ tel que $b\beta = \alpha$, alors bg_n converge vers α . Comme de plus

$$\nu = b^{-1} * \lim_{n \rightarrow \infty} bg_n * U$$

on peut appliquer ce qui précède pour conclure. On remarque que la représentation de ν ne dépend pas du choix de b grâce à la Proposition 3.1.4, (2), ce qui prouve en particulier l'invariance de \overline{m} par K_{α} . \square

Le résultat de la proposition précédente conduit à l'étude des mesures μ -excessives sur $\text{Hor}(\Gamma)$ invariante par K_{α} , dont nous allons voir dans le lemme suivant qu'elles sont en correspondance avec les mesures sur le bord :

LEMME 3.1.7. *A toute mesure de Radon, \overline{m} , sur $\text{Hor}(\Gamma)$ invariante par l'action à droite de K_{α} est associée une unique mesure, m , sur $\partial^* \mathbb{T}$, telle que*

$$(3.1.5) \quad \overline{m}(f) = m(\overline{f})$$

où \overline{f} est la fonction de $\partial^* \mathbb{T} = \text{Hor}(\Gamma)/K_{\alpha}$ définie par

$$\overline{f}(x) = \int_{K_{\alpha}} f(xk) m_{K_{\alpha}}(dk)$$

avec $m_{K_{\alpha}}$, la mesure de Haar de K_{α} .

De plus

$$\mu \dot{*} \overline{m}(f) = \mu \dot{*} m(\overline{f})$$

et donc il existe une unique mesure de Radon μ -excessive sur $\partial^*\mathbb{T}$ si et seulement si il existe une unique mesure de Radon μ -excessive sur $\text{Hor}(\Gamma)$ invariante par K_α .

DÉMONSTRATION. Des résultats classiques affirment que à toute mesure de Radon, \overline{m} , sur $\text{Hor}(\Gamma)$ invariante par l'action à droite de K_α on peut associer une unique mesure, m , sur Γ/K_α , qui vérifie (3.1.5) et que l'application

$$f \mapsto \overline{f}(x) = \int_{K_\alpha} f(xk) m_{K_\alpha}(dk)$$

est un homomorphisme surjectif de $C_c(\text{Hor}(\Gamma))$ sur $C_c(\text{Hor}(\Gamma)/K_\alpha)$. Comme $\text{Hor}(\Gamma)$ opère transitivement sur $\partial^*\mathbb{T}$ et K_α est le stabilisateur de α , on sait que $\text{Hor}(\Gamma)/K_\alpha$ est homéomorphe à $\partial^*\mathbb{T}$ et donc \overline{f} est bien une fonction dans $C_c(\partial^*\mathbb{T})$.

On vérifie immédiatement que pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\gamma \dot{*} f(x) = \overline{f}(\gamma \cdot x)$ et donc

$$\begin{aligned} \gamma \dot{*} \overline{m}(f) &= \int_{\text{Hor}(\Gamma)} \gamma \dot{*} f(b) \overline{m}(db) \\ &= \int_{\partial^*\mathbb{T}} \overline{\gamma \dot{*} f(x)} m(dx) \\ &= \int_{\partial^*\mathbb{T}} \overline{f}(\gamma \cdot x) m(dx) \\ &= \gamma \dot{*} m(\overline{f}) \end{aligned}$$

En particulier

$$\mu \dot{*} \overline{m}(f) = \mu \dot{*} m(\overline{f})$$

Si m est une mesure de Radon μ -excessive sur $\partial^*\mathbb{T}$ alors \overline{m} est aussi μ -excessive et par construction \overline{m} est invariante par action à droite de K_α . \square

Lorsque μ admet un moment, on a montré dans le chapitre précédent l'existence et l'unicité (à une constante multiplicative près) d'une mesure μ -excessive pour la chaîne de Markov sur le bord de l'arbre $\partial^*\mathbb{T}$, dans le cas $\mu(\phi) \geq 0$. On peut donc étendre ce résultat à la chaîne de Markov induite sur $\text{Hor}(\Gamma)$. Bien que l'unicité de la mesure invariante ne nous permette pas de conclure tout de suite que l'on peut prolonger par continuité le noyau potentiel au bord de l'arbre (car les mesures limites vont être caractérisées à une constante multiplicative près), on pourra atteindre ce résultat en utilisant "l'équation de renouvellement" qui a été introduite dans la Proposition 2.2.4 et que l'on étend au groupe Γ avec le corollaire suivant

COROLLAIRE 3.1.8. *Sous les hypothèses de la Proposition 2.2.4, si \bar{m} est l'extension à $\text{Hor}(\Gamma)$ de la mesure de Radon invariante définie dans (2.2.1), il existe une probabilité \bar{p} sur Γ telle que*

$$U * \bar{p} = \bar{m} \times m_{\mathbb{Z}} \quad \text{sur } \text{Hor}(\Gamma) \times \mathbb{Z}_+$$

DÉMONSTRATION. Grâce à la Proposition 2.2.4, on sait qu'il existe une probabilité p sur $\partial^*\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$ telle que

$$U * p = m \times m_{\mathbb{Z}} \quad \text{sur } \partial^*\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_+,$$

puisque $\tilde{U}f(\xi, z) = U * (\xi, z)(f)$. On définit \bar{p} par

$$\bar{p}(f \times h) = p(\bar{f} \times h)$$

pour tout couple de fonctions $f \in C_c(\text{Hor}(\Gamma))$ et $h \in C_c(\mathbb{Z})$. On a alors, si le support de h est contenu dans \mathbb{Z}_+

$$\begin{aligned} U * \bar{p}(f \times h) &= \int_{\Gamma} f(g \cdot b)h(\phi(g) + \phi)U(dg)\bar{p}(db d\phi) \\ &= \int_{\Gamma} \bar{f}(g \cdot b)h(\phi(g) + \phi)U(dg)p(db d\phi) \\ &= U * p(\bar{f} \times h) \\ &= m \times m_{\mathbb{Z}}(\bar{f} \times h) \\ &= \bar{m} \times m_{\mathbb{Z}}(f \times h) \end{aligned}$$

On peut maintenant conclure avec : □

THÉORÈME 3.1.9. *Supposons que $\mathbb{E}[|\phi(X_1)|] < \infty$ alors :*

1. *Si $\mu(\phi) = \mathbb{E}[\phi(X_1)] > 0$, le seul point d'accumulation de $\{U(g, \cdot)\}_{g \in \Gamma}$ au voisinage de $\partial^*\mathbb{T}$ est la mesure nulle.*

Si on suppose aussi μ étalée ou bien $\Gamma \subseteq \text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$ ou $\Gamma \subseteq \text{Aff}(\mathbb{Z}_q)$ alors

2. *Si $\mu(\phi) < 0$ et $\mathbb{E}[|b(X_1)|] < +\infty$ et si on note \bar{m} l'unique mesure de Radon $\hat{\mu}$ -invariante sur $\text{Hor}(\Gamma)$ invariante pour K_α , définie comme l'extension à $\text{Hor}(\Gamma)$ de la mesure (2.2.1), alors pour tout $\beta \in \partial^*\mathbb{T}$ et pour tout $b \in \Gamma$ tel que $\alpha = b\beta$*

$$\lim_{g \rightarrow \beta} U(g, \cdot) = b * \widehat{(\bar{m} \times m_{\mathbb{Z}})}$$

De plus, si $m_{\mathbb{Z}}$ est la mesure du comptage, la mesure \bar{m} a une masse totale finie égale à $-\frac{1}{\mu(\phi)}$.

3. *Si $\mu(\phi) = 0$, $\mathbb{E}[\phi(X_1)^2] < +\infty$ et $\mathbb{E}[|b(X_1)|^{2+\epsilon}] < +\infty$ et si on note \bar{m} l'unique mesure de Radon $\hat{\mu}$ -invariante sur $\text{Hor}(\Gamma)$ invariante pour K_α , définie comme l'extension à $\text{Hor}(\Gamma)$ de la mesure (2.2.1), alors pour tout $\beta \in \partial^*\mathbb{T}$ et pour tout $b \in \Gamma$ tel que $\alpha = b\beta$*

$$\lim_{g \rightarrow \beta} U(g, \cdot) = b * \widehat{(\bar{m} \times m_{\mathbb{Z}})}$$

On remarque que si on identifie \mathbb{Z} avec le sous-groupe de Γ engendré par s on peut écrire les mesures limites sous une autre forme plus adaptée à certains contextes

$$(\widehat{\overline{m} \times m_{\mathbb{Z}}}) = (\widehat{\overline{m} * m_{\mathbb{Z}}}) = \widehat{m}_{\mathbb{Z}} * \widehat{\overline{m}} = m_{\mathbb{Z}} * \widehat{\overline{m}}.$$

DÉMONSTRATION. 1. Si $\mu(\phi) > 0$, la marche aléatoire $S_n = \phi(R_n)$ sur \mathbb{Z} est transiente et le seul point d'accumulation de son noyau potentiel, U_{ϕ} , au voisinage de $+\infty$ est zéro (cf. proposition 3.4 [Rev75]). Il s'en suit que si f_1 et f_2 sont deux fonctions bornées positives à support compact dans $\text{Hor}(\Gamma)$ et \mathbb{Z} respectivement alors

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{g \rightarrow \alpha} U(g, f_1 \times f_2) &\leq \lim_{g \rightarrow \alpha} \|f_1\|_{\infty} U(g, 1_{\text{Hor}(\Gamma)} \times f_2) \\ &= \|f_1\|_{\infty} \lim_{g \rightarrow \alpha} U_{\phi}(\phi(g), f_2) = 0 \end{aligned}$$

parce que $\phi(g)$ converge vers $+\infty$, lorsque g converge vers $\alpha \in \partial^* \mathbb{T}$.

2. et 3. Soit g_n une suite qui converge vers α et telle que $U(g_n, \cdot)$ converge vers une mesure limite ν . On veut montrer que $\hat{\nu} = \widehat{\overline{m} \times m_{\mathbb{Z}}}$. On rappelle que grâce à (3.1.3) on peut supposer $g_n = s^{\phi_n}$, et que pour tout $g \in \Gamma$

$$\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} s^{\phi_n} g * U.$$

Si \hat{U} est la mesure potentiel associée à la mesure $\hat{\mu}$, image de μ par l'inversion du groupe, alors

$$\hat{\nu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{s^{\phi_n} g * U} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{U} * g^{-1} s^{-\phi_n}.$$

Puisque ϕ_n converge vers $+\infty$ pour toute fonction f à support compact dans Γ , pour tout n suffisamment grand les fonctions

$$x \mapsto f * s^{-\phi_n}(x) = f(x s^{-\phi_n})$$

sont à support dans $\text{Hor}(\Gamma) \times \mathbb{Z}_+$. Puisque $\hat{\mu}(\phi) = -\mu(\phi) \geq 0$, on peut appliquer à $\hat{\mu}$ le Corollaire 3.1.8 et donc il existe une probabilité \bar{p} telle que pour tout n suffisamment grand

$$\hat{U} * \bar{p} * s^{-\phi_n}(f) = \hat{U} * \bar{p}(f * s^{-\phi_n}) = \overline{m} \times m_{\mathbb{Z}}(f * s^{-\phi_n}) = \overline{m} \times m_{\mathbb{Z}}(f).$$

D'autre part, puisque \bar{p} est une probabilité, on a par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{U} * \bar{p} * s^{-\phi_n}(f) = \int_{\Gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{U} * g * s^{-\phi_n}(f) \bar{p}(dg) = \int_{\Gamma} \hat{\nu}(f) \bar{p}(dg) = \hat{\nu}(f).$$

Ceci complète la preuve dans le cas $\beta = \alpha$. Si $\beta \neq \alpha$, on se ramène au cas précédent en multipliant à gauche par un élément $b \in \Gamma$ tel que $b\beta = \alpha$. \square

On peut en particulier appliquer ce résultat à des produits de transformations affines à coefficients rationnels, qui peuvent être vues comme marches aléatoires sur le groupe $\text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$. On a en particulier le corollaire suivant

COROLLAIRE 3.1.10. *Soit μ une mesure sur $\text{Aff}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \rtimes \mathbb{Q}^*$. On note par t et a les projections de $\text{Aff}(\mathbb{Q})$ sur \mathbb{Q} et \mathbb{Q}^* respectivement. Supposons que la mesure soit irréductible dans $\text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$ i.e.*

$$\mathbb{P}\left[|a(X_1)|_p = 1\right] < 1 \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{Q} \quad \mathbb{P}[a(X_1)y + t(X_1) = y] < 1$$

et que les conditions de moment du théorème précédent soient satisfaites. Alors pour tout $t \in \mathbb{Q}$ et $a \in \mathbb{Q}^$.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U((t, ap^n), \cdot) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{E}\left[\log |a(X_1)|_p\right] > 0 \\ (-t, 0) * (\widehat{\overline{m}} \times m_{\mathbb{Z}}) & \text{si } \mathbb{E}\left[\log |a(X_1)|_p\right] \leq 0 \end{cases}$$

En particulier si $\mathbb{E}\left[\log |a(X_1)|_p\right] < 0$, pour toute $f \in C_c(\text{Aff}(\mathbb{Q}_p))$, la fonction

$$h((t, a)) = (\widehat{\overline{m}} \times m_{\mathbb{Z}}) * (t, a)(f)$$

est une fonction de $\text{Aff}(\mathbb{Q})$, μ -harmonique à gauche bornée et non constante.

On doit remarquer que ces résultats sont très différents de ceux qu'on obtient lorsque on plonge le groupe $\text{Aff}(\mathbb{Q})$ dans $\text{Aff}(\mathbb{R})$, au lieu de le compléter avec les rationnels p -adiques. En particulier pour les marches aléatoires sur le groupe affine réel qui ont une loi étalée, dans les directions considérées dans ce dernier corollaire, le noyau potentiel converge vaguement (sur les compacts de $\text{Aff}(\mathbb{R})$) vers la mesure nulle (cf [Éli77]). Toujours sous l'hypothèse d'étalement sur $\text{Aff}(\mathbb{R})$, on sait aussi que si $\mathbb{E}[\log |a(X_1)|] \leq 0$, il n'existe pas de fonctions harmoniques bornées, c'est à dire que la frontière de Poisson est triviale. Le corollaire montre que pour des mesures à support fini dans $\text{Aff}(\mathbb{Q})$ qui ont un drift p -adique négatif ou nul (indépendamment de leur drift réel) la frontière de Poisson ne peut pas être nulle.

3.1.2. Limites vers ω . On va montrer que dans tous les cas le seul point d'accumulation du noyau potentiel au voisinage de ω est la mesure nulle. Pour un sous-groupe non-exceptionnel quelconque de $\text{Aff}(\mathbb{T})$ on va tout d'abord montrer qu'on peut obtenir ce résultat en s'appuyant sur le dernier théorème de la section précédente et en utilisant donc des hypothèses de moment. Dans la deuxième partie de cette section on montrera que dans le cas particulier où Γ est le groupe $\text{Aff}(\mathbb{T})$ tout entier ou bien le groupe affine de \mathbb{Q}_p , on peut montrer la convergence vers la mesure nulle avec des techniques différentes qui permettent de se passer de l'hypothèse de moment.

THÉORÈME 3.1.11. *Supposons que μ soit étalée et que $\phi(X_1)$ soit intégrable. Si $\mu(\phi) < 0$ on demande aussi que $\mathbb{E}[|b(X_1)|] < +\infty$ tandis que si $\mu(\phi) = 0$ on suppose que $\mathbb{E}[\phi(X_1)^2] < +\infty$ et $\mathbb{E}[|b(X_1)|^{2+\varepsilon}] < +\infty$. Alors*

$$\lim_{g \rightarrow \omega} g * U = 0.$$

DÉMONSTRATION. Si g converge vers ω de sorte que $\phi(g)$ reste borné supérieurement, on peut appliquer le Théorème 2.16 de [Éli82], qui garantit que pour un groupe non-unimodulaire, sous la seule hypothèse d'étalement, le noyau potentiel tend vers la mesure nulle lorsque g tend vers l'infini de manière à ce que le module $\Delta(g) = q^{\phi(g)}$ reste borné supérieurement.

Il reste donc à montrer que pour toute suite g_n qui converge vers ω et telle que $\phi(g_n)$ converge vers $+\infty$ et pour toute fonction f continue positive à support compact, $U(g_n, f)$ converge vers zéro. On va distinguer trois cas selon le signe du drift $\mu(\phi)$.

Cas 1 : $\mu(\phi) > 0$. Comme dans la preuve du Théorème 3.1.9 dans ce cas on peut appliquer directement le théorème du renouvellement pour la marche aléatoire projetée sur \mathbb{Z} . En effet si U_ϕ est le potentiel de la marginale sur \mathbb{Z} et F est une fonction à support compact sur \mathbb{Z} telle que $f(g) \leq F(\phi(g))$ alors d'après le théorème du renouvellement classique (cf. par exemple [Rev75])

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} U(g_n, f) \leq \lim_{h \rightarrow +\infty} U_\phi(h, F) = 0.$$

Cas 2 : $\mu(\phi) < 0$. On commence par observer que dans ce cas le théorème de renouvellement pour \mathbb{Z} dit que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} U_\phi(h, \cdot) = \frac{1}{-\mu(\phi)} m_{\mathbb{Z}}$$

où $m_{\mathbb{Z}}$ est la mesure du comptage. D'autre part on a vu dans le Théorème 3.1.9 que si on identifie \mathbb{Z} avec le sous groupe engendré par l'homothétie $s \in \Gamma$ tel que $\phi(s) = 1$, alors

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} s^h * U = m_{\mathbb{Z}} * \widehat{m}$$

où \widehat{m} est une mesure sur $\text{Hor}(\Gamma)$ de masse totale exactement égale à $\frac{1}{-\mu(\phi)}$. Alors pour tout compact H de \mathbb{Z} et tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble J_ε compact et ouvert de $\text{Hor}(\Gamma)$ tel que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +\infty} s^h * U(HJ_\varepsilon^c) &= \lim_{h \rightarrow +\infty} s^h * U(H\text{Hor}(\Gamma) - HJ_\varepsilon) \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} U_\phi(h, H) - \lim_{h \rightarrow +\infty} s^h * U(HJ_\varepsilon) \\ &= m_{\mathbb{Z}}(H) \left(\frac{1}{-\mu(\phi)} - \widehat{m}(J_\varepsilon) \right) < \varepsilon; \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la famille de mesures $\{s^h * U\}_{h \in \mathbb{N}}$ est tendue sur $\text{Hor}(\Gamma)$. On fixe maintenant un compact quelconque K dans Γ et on observe que si $g = b(g)s^{\phi(g)}$, alors

$$g * U(K) = U(g^{-1}K) = U(s^{-\phi(g)}b(g)^{-1}K) = s^{\phi(g)} * U(b(g)^{-1}K).$$

Pour toute suite g_n qui converge vers ω et telle que $\phi(g_n)$ converge vers $+\infty$, sa projection sur le groupe horocyclique $b(g_n)$ (et donc son inverse $b(g_n)^{-1}$) converge

également vers ω . Soit H un compact de \mathbb{Z} tel que $\phi(K) \subseteq H$, alors pour tout ε et pour tout $x \in K$

$b(g_n)^{-1}x = s^{\phi(x)}s^{-\phi(x)}b(g_n)^{-1}s^{\phi(x)}b(x) \in HJ_\varepsilon^c$ pour tout n suffisamment grand et donc pour tout n suffisamment grand $b(g_n)^{-1}K \subseteq HJ_\varepsilon^c$. On peut alors conclure

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} g_n * U(K) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} s^{\phi(g_n)} * U(b(g_n)^{-1}K) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} s^{\phi(g_n)} * U(HJ_\varepsilon^c) < \varepsilon$$

et donc $g_n * U(K)$ converge vers zéro.

Cas 3 : $\mu(\phi) = 0$. Soit $m = \max\{\phi(g) : g \in \text{supp } f\}$ et pour tout g fixé soit t le premier temps auquel $\phi(g) + S_n = \phi(gR_n)$ descend en dessous de m

$$t = \inf\{k > 0 : \phi(g) + S_k \leq m\}.$$

Évidemment pour tout $n < t$ on a $f(gR_n) = 0$ et donc

$$g * U(f) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} f(gR_n)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{t-1} f(gR_n)\right] + \mathbb{E}[gR_t * U(f)] = \mathbb{E}[gR_t * U(f)].$$

On a déjà remarqué que, lorsque g converge vers ω de sorte que $\phi(g)$ reste borné supérieurement, $g * U(f)$ tend vers 0. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc un compact K_ε dans Γ tel que

$$g * U(f) \leq \varepsilon \text{ pour tout } g \in K_\varepsilon^c \cap [\phi \leq m].$$

Puisque $\phi(gR_t) \leq m$ et si $C = \|U(\cdot, f)\|_\infty$

$$\begin{aligned} g * U(f) &= \mathbb{E}[(gR_t * U(f))1_{[\phi(gR_t) \leq m]}] \\ &\leq \varepsilon + \mathbb{E}[(gR_t * U(f))1_{[gR_t \in K_\varepsilon]}] \\ &\leq \varepsilon + C\mathbb{E}[1_{[gR_t \in K_\varepsilon]}]. \end{aligned}$$

Soit maintenant l_k^- la suite de temps d'échelle pour lesquels $S_n = \phi(R_n)$ atteint ses minima successifs :

$$l_k^- = \min\{n > l_{k-1}^- : S_n < S_{l_{k-1}^-}\} \text{ et } l_0^- = 0;$$

alors, puisque $\phi(R_t)$ est strictement plus petit que le minimum de $\phi(R_n)$ pour $n < t$, il existe i tel que $t = l_i^-$. Alors si $U_{l_i^-}$ est le potentiel de la marche aléatoire

$$\left\{R_{l_k^-}\right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

$$\begin{aligned} g * U(f) &\leq \varepsilon + C\mathbb{E}[1_{[gR_t \in K_\varepsilon]}] = \varepsilon + C\mathbb{E}[1_{[gR_{l_i^-} \in K_\varepsilon]}] \\ &\leq \varepsilon + C\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} 1_{[gR_{l_k^-} \in K_\varepsilon]}\right] = \varepsilon + Cg * U_{l_i^-}(K_\varepsilon) \end{aligned}$$

On observe que $R_{l_k^-}$ satisfait aux conditions requises pour appliquer le point 2. En effet $\mathbb{E}[\phi(R_{l_1^-})] < 0$, le Lemme 2.2.1 nous dit que $R_{l_1^-}$ est intégrable en norme

et le Lemme 2.26 dans [Éli82] garantit que sa loi est étalée¹. Donc

$$\overline{\lim}_{g \rightarrow \omega} g * U(f) \leq \varepsilon + \overline{\lim}_{g \rightarrow \omega} g * U_{l^-}(K_\varepsilon) = \varepsilon;$$

le choix arbitraire de ε nous permet de conclure. \square

Dans ce qui suit on va montrer que lorsque $\Gamma = \text{Aff}(\mathbb{T})$ ou $\Gamma = \text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$ on peut obtenir ce dernier résultat avec la seule hypothèse d'étalement; bien que on soupçonne que ceci soit vrai aussi pour un groupe Γ quelconque, la question reste ouverte. On commence par prouver que les mesures limites au voisinage de ω ont comme périodes tout le groupe horocyclique $\text{Hor}(\mathbb{T})$ ou bien, dans le cas du groupe affine p -adique, le groupe de translation.

LEMME 3.1.12. *Supposons que μ soit étalée. Soit g_n une suite de Γ qui converge vers ω et telle que $U(g_n, \cdot)$ converge vaguement vers ν .*

- (1) Si $\Gamma = \text{Aff}(\mathbb{T})$ alors tout élément de $\text{Hor}(\mathbb{T})$ est période de ν .
- (2) Si $\Gamma = \text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$ alors tout élément de $\text{Tra}(\mathbb{Q}_p)$ est période de ν .

DÉMONSTRATION. 1. $\Gamma = \text{Aff}(\mathbb{T})$. Soit $b \in \text{Hor}(\mathbb{T})$. On fixe $\alpha \in \partial^* \mathbb{T}$ et on considère la base de voisinages de ω définis par

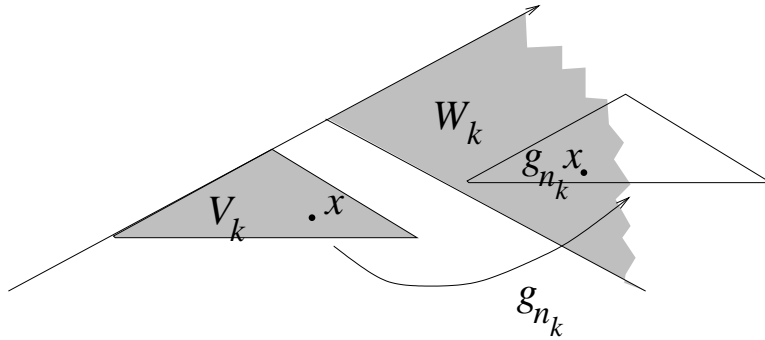
$$W_k = \{x \in \mathbb{T} : \phi(x \wedge \alpha) \leq -k\}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors, puisque $b(W_k) = W_k$, on peut définir la transformation b_k par

$$b_k x = \begin{cases} bx & \text{si } x \notin W_k \\ x & \text{si } x \in W_k \end{cases}$$

On a donc construit une suite b_k dans $\text{Aff}(\mathbb{T})$ qui converge vers b et telle que chaque élément restreint à un voisinage de ω est l'identité. Soit $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de compacts de \mathbb{T} croissante qui converge vers \mathbb{T} . Puisque, pour tout $x \in \mathbb{T}$, la suite $g_n x$ est définitivement dans tout voisinage de ω , il existe une sous-suite de g_n telle que

$$g_{n_k}(V_k) \subseteq W_k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$



¹L'hypothèse que le groupe soit presque connexe qu'on y trouve n'est pas nécessaire pour montrer l'étalement.

Alors pour tout $x \in \mathbb{T}$ et pour tout k suffisamment grand tel que $x \in V_k$, on a que

$$g_{n_k}^{-1} b_k g_{n_k} x = g_{n_k}^{-1} g_{n_k} x = x$$

puisque $g_{n_k} x \in W_k$, c'est-à-dire que $g_{n_k}^{-1} b_k g_{n_k}$ converge vers l'identité. En utilisant la convergence uniforme, on a alors que pour toute fonction $f \in C_c^+(\Gamma)$

$$b * \nu(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k g_{n_k} * U(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k} (g_{n_k}^{-1} b_k g_{n_k}) * U(f) = \nu(f)$$

2. Dans le cas du groupe affine p -adique on peut procéder comme sur le groupe affine réel. En effet $\text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$ est le produit semi-direct de \mathbb{Q}_p et \mathbb{Q}_p^* , et la suite des $g_n = (t_n, a_n)$ converge vers ω si et seulement si $|a_n|_p$ ou bien $|t_n|_p$ convergent vers l'infini.

Soit $(t, 1) \in \text{Tra}(\mathbb{Q}_p)$. Si $|a_n|_p \rightarrow +\infty$ alors

$$\begin{aligned} (t, 1) * \nu(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (t, 1)(t_n, a_n) * U(f) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, a_n)(t_n, a_n)^{-1}(t, 1)(t_n, a_n) * U(f) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, a_n) \left(\frac{t}{a_n}, 1 \right) * U(f) \\ &= \nu(f) \quad \text{car } \frac{t}{a_n} \rightarrow 0 \text{ dans } \mathbb{Q}_p \end{aligned}$$

Tandis que lorsque $|t_n|_p \rightarrow +\infty$ on a

$$\begin{aligned} (t, 1) * \nu(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (t, 1)(t_n, a_n) * U(f) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n(1 + \frac{t}{t_n}), a_n) * U(f) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (0, 1 + \frac{t}{t_n})(t_n, a_n)(0, (1 + \frac{t}{t_n})^{-1}) * U(f) \\ &= \nu(f) \quad \text{car } 1 + \frac{t}{t_n} \rightarrow 1 \text{ dans } \mathbb{Q}_p \end{aligned}$$

□

THÉORÈME 3.1.13. *Supposons que μ soit étalée. Si $\Gamma = \text{Aff}(\mathbb{T})$ ou $\Gamma = \text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$ alors*

$$\lim_{g \rightarrow \omega} U(g, \cdot) = 0$$

DÉMONSTRATION. (cf. [Éli77]) Supposons $\Gamma = \text{Aff}(\mathbb{T})$ (respectivement $\Gamma = \text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$). Si g_n converge vers ω et $U(g_n, \cdot)$ converge vers ν , on a vu que tout les éléments de $\text{Hor}(\mathbb{T})$ (respectivement de $\text{Tra}(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p$ si $\Gamma = \text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$) sont périodes de ν . Donc si on fixe $h \in C_c(\mathbb{Z})$ (resp. $h \in C_c(\mathbb{Q}_p^*)$) la mesure

$$f \mapsto \nu(f \times h)$$

est un multiple de la mesure de Haar, $m_{\text{Hor}(\mathbb{T})}$, de $\text{Hor}(\mathbb{T})$ (resp. de la mesure de Haar, $m_{\mathbb{Q}_p}$, de $\text{Tra}(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p$). Donc il existe une mesure λ sur \mathbb{Z} (resp. sur \mathbb{Q}_p^*) telle que

$$\nu = m_{\text{Hor}(\mathbb{T})} \times \lambda$$

(resp. $\nu = m_{\mathbb{Q}_p} \times \lambda$).

Si $\phi(L_n)$ est transiente, alors pour tout compact K de \mathbb{Z} la fonction $U(\cdot, \text{Hor}(\mathbb{T})K)$ est bornée par une constante M ; alors pour tout sous-ensemble C de $\text{Hor}(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} m_{\text{Hor}(\mathbb{T})}(C)\lambda(K) &= \lim_{n \rightarrow \infty} U(g_n, CK) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} U(g_n, \text{Hor}(\mathbb{T})K) \leq M < +\infty \end{aligned}$$

Alors puisque $m_{\text{Hor}(\mathbb{T})}$ n'est pas bornée, λ doit être nulle (de façon analogue dans le cas $\text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$).

Supposons que $\phi(L_n)$ soit récurrente (et donc, dans le cas $\text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$, aussi la marche aléatoire $a(L_n)$ projetée sur \mathbb{Q}_p^* est récurrente, parce que \mathbb{Q}_p^* est produit de \mathbb{Z} et d'un compact). Comme on peut montrer que la mesure ν est μ -excessive, λ est une mesure excessive pour la marginale μ_ϕ de μ sur \mathbb{Z} (resp. pour la marginale μ_a de μ sur \mathbb{Q}_p^*). Mais la récurrence implique que alors λ est un multiple de la mesure de Haar (cf. Ch. I Proposition 45 [GKR77]). Par conséquent ν est une mesure de Radon sur Γ invariante à droite pour l'action du groupe et telle que l'ensemble des mesures $\{g * \nu\}_{g \in \Gamma}$ est vaguement relativement compact. Comme Γ est non-unimodulaire, cela ne peut arriver que si ν est la mesure nulle (cf. Théorème 1.18 [Éli82]). \square

3.2. Mesures limites du noyau de Martin

On va maintenant étudier le noyau de Martin et donner une représentation explicite des mesures limites $\{K(\alpha, \cdot)\}_{\alpha \in \partial\mathbb{T}}$ de son prolongement continu au bord de l'arbre.

On rappelle que lorsque μ est irréductible, à support compact et $\mu(\phi) \neq 0$ il existe un unique nombre θ non nul tel que $\mathbb{E}[e^{\theta\phi(X_1)}] = 1$. La fonction de Γ

$$h_\theta(x) = e^{\theta\phi(x)}$$

est alors une fonction harmonique positive. De plus la mesure de Haar, $m_{\mathbb{Z}}$, et la mesure $h_\theta m_{\mathbb{Z}}$ sont les seules mesures sur \mathbb{Z} μ_ϕ -invariantes extremales.

THÉORÈME 3.2.1. *Supposons que μ soit irréductible et qu'elle ait une densité continue avec support compact et ouvert et soit c_v une constante de normalisation.*

(1) *Si $\mu(\phi) < 0$ alors*

$$K_v(\omega, \cdot) = c_v m_{\text{Hor}(\Gamma)} \times h_\theta m_{\mathbb{Z}} = c_v h_\theta m_\Gamma^d$$

et si \bar{m} est l'unique mesure de probabilité $\hat{\mu}$ -invariante sur $\text{Hor}(\Gamma)$ invariante pour K_α , alors pour tout $b \in \Gamma$ telle que $b\alpha = \beta$

$$K_v(\beta, \cdot) = c_v b * (\widehat{\bar{m} \times m_{\mathbb{Z}}})$$

(2) Si $\mu(\phi) = 0$ alors

$$K_v(\omega, \cdot) = c_v m_{\text{Hor}(\Gamma)} \times m_{\mathbb{Z}} = c_v m_{\Gamma}^d$$

et si \overline{m} est l'unique mesure de Radon $\hat{\mu}$ -invariante sur $\text{Hor}(\Gamma)$ invariante pour K_{α} , alors pour tout $b \in \Gamma$ telle que $b\alpha = \beta$

$$K_v(\beta, \cdot) = c_v b * (\widehat{\overline{m} \times m_{\mathbb{Z}}})$$

(3) Si $\mu(\phi) > 0$

$$K_v(\omega, \cdot) = c_v m_{\text{Hor}(\Gamma)} \times m_{\mathbb{Z}} = c_v m_{\Gamma}^d$$

et si \overline{m} est l'unique mesure de probabilité $(h_{\theta}\hat{\mu})$ -invariante sur $\text{Hor}(\Gamma)$ invariante pour K_{α} , alors pour tout $b \in \Gamma$ telle que $b\alpha = \beta$

$$K_v(\beta, \cdot) = c_v b * h_{\theta}(\widehat{\overline{m} \times m_{\mathbb{Z}}})$$

DÉMONSTRATION. On commence par supposer $\mu(\phi) \leq 0$. Dans ce cas, lorsque $g \rightarrow \beta \in \partial^*\mathbb{T}$, les limites du noyau potentiel sont non nulles et l'on peut appliquer directement le résultat du Théorème 3.1.9. Il reste donc à étudier la limite de $K_v(g, \cdot)$ lorsque $g \rightarrow \omega$.

On observe que la mesure $K_v(\omega, \cdot)$ admet tous les éléments de $\text{Hor}(\Gamma)$ comme périodes. En effet en raisonnant comme dans la démonstration du point 3 du Lemme 3.1.12, pour tout $b \in \text{Hor}(\Gamma)$ on considère $x \in \mathbb{T}$ tel que $bx = x$ et le stabilisateur $V(x)$ de x qui est un sous-groupe ouvert et compact. Alors, puisque $bV(x) = V(x)$ pour tout g dans Γ

$$U(bg, 1_{V(x)}) = U(g, 1_{b^{-1}V(x)}) = U(g, 1_{V(x)})$$

et donc

$$b * K_{1_{V(x)}}(\omega, f) = \lim_{g \rightarrow \omega} \frac{U(bg, f)}{U(g, 1_{V(x)})} = \lim_{g \rightarrow \omega} \frac{U(bg, f)}{U(bg, 1_{V(x)})} = K_{1_{V(x)}}(\omega, f)$$

puisque bg converge vers ω , lorsque g converge vers ω . On conclut que pour tout $v \in C_c(\Gamma)$

$$b * K_v(\omega, \cdot) = b * \frac{K_{1_{V(x)}}(\omega, \cdot)}{K_{1_{V(x)}}(\omega, v)} = K_v(\omega, \cdot).$$

Comme la mesure $K_v(\omega, \cdot)$ est une mesure de Radon invariante il existe une mesure λ sur \mathbb{Z} qui est μ_{ϕ} -invariante tel que

$$K_v(\omega, \cdot) = c_r m_{\text{Hor}(\Gamma)} \times \lambda$$

De plus puisque $K_v(\omega, \cdot)$ est extrémale, λ doit être également extrémale.

Si $\mu(\phi) = 0$ on sait que la seule mesure μ_{ϕ} -invariante est la mesure de Haar.

Si $\mu(\phi) < 0$, les mesures μ_{ϕ} -invariantes extrémales sont la mesure de Haar $m_{\mathbb{Z}}$ et $h_{\theta}m_{\mathbb{Z}}$. On montrera que $\lambda = h_{\theta}m_{\mathbb{Z}}$, en montrant que $m_{\text{Hor}(\Gamma)} \times m_{\mathbb{Z}}$ ne peut pas

être extrémale. En effet les mesures $b * (\widehat{\overline{m}} \times m_{\mathbb{Z}})$ sont μ -invariantes et, puisque \overline{m} est une probabilité

$$\begin{aligned}
\int b * (\widehat{\overline{m}} \times m_{\mathbb{Z}})(f) m_{\text{Hor}(\Gamma)}(db) &= \int (\overline{m} \times m_{\mathbb{Z}}) * b(\hat{f}) m_{\text{Hor}(\Gamma)}(db) \\
&= \int \hat{f}(b_1 s^{\phi_1} b) m_{\text{Hor}(\Gamma)}(db) \overline{m}(db_1) m_{\mathbb{Z}}(d\phi_1) \\
&= \int \hat{f}(s^{\phi_1} s^{-\phi_1} b_1 s^{\phi_1} b) m_{\text{Hor}(\Gamma)}(db) \overline{m}(db_1) m_{\mathbb{Z}}(d\phi_1) \\
&= \int \hat{f}(s^{\phi_1} b) m_{\text{Hor}(\Gamma)}(db) \overline{m}(db_1) m_{\mathbb{Z}}(d\phi_1) \\
&= \int \hat{f}(s^{\phi_1} b) m_{\text{Hor}(\Gamma)}(db) m_{\mathbb{Z}}(d\phi_1) \\
&= m_{\text{Hor}(\Gamma)} \times m_{\mathbb{Z}}(f)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire la mesure $m_{\text{Hor}(\Gamma)} \times m_{\mathbb{Z}}(f)$ est une moyenne des mesures μ -invariantes. Donc elle n'est pas extrémale et $K_v(\omega, \cdot)$ doit être un multiple de $m_{\text{Hor}(\Gamma)} \times h_{\theta} m_{\mathbb{Z}}$. Ceci termine la preuve du théorème dans le cas $\mu(\phi) \leq 0$.

Si $\mu(\phi) > 0$ on peut se ramener au cas $\mu(\phi) < 0$ en observant que

$$\mathbb{E}[\phi(X_1) e^{\theta\phi(X_1)}] = \left. \frac{d\mathbb{E}[e^{t\phi(X_1)}]}{dt} \right|_{t=\theta} < 0$$

puisque la fonction $\mathbb{E}[e^{t\phi(X_1)}]$ est convexe et égale à 1 en $t = 0$ et en $t = \theta < 0$. Donc la mesure $h_{\theta}\mu$ a un drift négatif, $h_{\theta}\mu(\phi) < 0$. On vérifie facilement que $(h_{\theta}\mu) * (h_{\theta}\mu) = h_{\theta}(\mu * \mu)$ et donc, si on note K_v^{μ} et U^{μ} les noyaux par rapport à la mesure μ et $K_v^{h_{\theta}\mu}$ et $U^{h_{\theta}\mu}$ les noyaux par rapport à la mesure $h_{\theta}\mu$, alors

$$K_v^{h_{\theta}\mu}(g, f) = \frac{g * h_{\theta} U^{\mu}(f)}{g * h_{\theta} U^{\mu}(v)} = \frac{h_{\theta}(g^{-1})(g * U^{\mu}(f h_{\theta}))}{h_{\theta}(g^{-1})(g * U^{\mu}(r h_{\theta}))} = K_{v h_{\theta}}^{\mu}(g, f h_{\theta})$$

et donc on peut déduire le comportement de K_v^{μ} de celui de $K_v^{h_{\theta}\mu}$ en multipliant les mesures limites par h_{θ} . \square

Comme annoncé, on peut résumer les résultats de cette section en donnant une représentation intégrale des mesures μ -invariantes

COROLLAIRE 3.2.2. *Si μ est irréductible et a une densité à support compact et ouvert, alors pour toute mesure de Radon μ -invariante, ν , il existe une unique constante C_{ν} et une unique mesure de Radon η_{ν} sur $\partial^* \mathbb{T}$ telles que pour toute*

famille $\{b_\beta\}_{\beta \in \partial^* \mathbb{T}}$ telle que $b_\beta \alpha = \beta$

$$\text{Si } \mu(\phi) < 0 \text{ alors } \nu = C_\nu h_\theta m_\Gamma^d + \int_{\partial^* \mathbb{T}} b_\beta * (\widehat{\bar{m}} \times m_{\mathbb{Z}}) \eta_\nu(d\beta)$$

$$\text{Si } \mu(\phi) = 0 \text{ alors } \nu = C_\nu m_\Gamma^d + \int_{\partial^* \mathbb{T}} b_\beta * (\widehat{\bar{m}} \times m_{\mathbb{Z}}) \eta_\nu(d\beta)$$

$$\text{Si } \mu(\phi) > 0 \text{ alors } \nu = C_\nu m_\Gamma^d + \int_{\partial^* \mathbb{T}} b_\beta * h_\theta (\widehat{\bar{m}} \times m_{\mathbb{Z}}) \eta_\nu(d\beta)$$

3.3. Mesure bi-invariante

Jusqu'à présent on s'est intéressé à la caractérisation des mesures qui sont invariantes par le produit de convolution de μ d'une seule coté; on va conclure ce chapitre avec l'étude des mesures bi-invariantes c'est-à-dire des mesures ν solutions des équations²

$$(3.3.1) \quad \mu * \nu = \nu * \mu = \nu.$$

Un des intérêts de ces mesures réside dans le fait qu'elles jouent un rôle fondamental dans l'étude des limites des produits de convolution de la mesure μ (cf. par exemple [Gui80]). Dans le prochain chapitre, on aura effectivement besoin de résultats de ce type pour établir un théorème limite local. On peut observer que l'équation (3.3.1) peut avoir plus d'une solution (par exemple pour une mesure sur \mathbb{Z} avec drift non nul), mais il est vraisemblable que sous des conditions de symétrie il y ait toujours unicité (à une constante multiplicative près). Ceci est loin d'être montré dans le cas général, mais les résultats précédents permettent de résoudre cette question pour des sous-groupes de $\text{Aff}(\mathbb{T})$.

PROPOSITION 3.3.1. *Supposons que μ est irréductible et qu'elle a une densité continue à support compact et ouvert. Si $\mu(\phi) = 0$, alors il existe une et une seule mesure de Radon ν_0 sur Γ (à une constante multiplicative près) telle que :*

$$\mu * \nu_0 = \nu_0 * \mu = \nu_0$$

De plus

$$\nu_0 = \bar{m}_1 * m_{\mathbb{Z}} * \widehat{\bar{m}}_2$$

où \bar{m}_1 et \bar{m}_2 sont les seules mesures de Radon sur $\text{Hor}(\Gamma)$, respectivement, μ -invariante et $\hat{\mu}$ -invariante, invariantes à droite pour K_α .

DÉMONSTRATION. (cf. [LPP97]) On vérifie tout de suite que la mesure $\bar{m}_1 * m_{\mathbb{Z}} * \widehat{\bar{m}}_2$ est bi-invariante, en effet, grâce à l'invariance de $m_{\mathbb{Z}}$ par multiplication de s^ϕ ,

$$\mu * (\bar{m}_1 * m_{\mathbb{Z}} * \widehat{\bar{m}}_2) = (\mu * \bar{m}_1) * m_{\mathbb{Z}} * \widehat{\bar{m}}_2 = \bar{m}_1 * m_{\mathbb{Z}} * \widehat{\bar{m}}_2$$

²Le problème, analogue mais non équivalent, de la caractérisation des fonctions bi-harmoniques a été aussi posé en littérature ([Kai92, Rau88]).

et

$$\bar{m}_1 * m_{\mathbb{Z}} * \widehat{m}_2 * \mu = \bar{m}_1 * m_{\mathbb{Z}} * \left(\widehat{\mu * \bar{m}_2} \right) = \bar{m}_1 * m_{\mathbb{Z}} * \widehat{m}_2$$

Soit ν_0 une mesure bi-invariante. Étant invariante à droite, il existe une unique constante C_0 et une unique mesure de Radon η_0 sur $\partial^*\mathbb{T}$ telles que³

$$\begin{aligned} \nu_0 &= C_0 m_{\Gamma}^d + \int_{\partial^*\mathbb{T}} b_{\beta} * m_{\mathbb{Z}} * \widehat{m}_2 \eta_0(d\beta) \\ &= C_0 m_{\Gamma}^d + \int_{\partial^*\mathbb{T} \times K_{\alpha}} b_{\beta} * r * m_{\mathbb{Z}} * \widehat{m}_2 \eta_0(d\beta) m_{K_{\alpha}}(dr) \\ &= C_0 m_{\Gamma}^d + \bar{\eta}_0 * m_{\mathbb{Z}} * \widehat{m}_2 \end{aligned}$$

où $\bar{\eta}_0$ est l'extension à $\text{Hor}(\Gamma)$ de la mesure η_0 de $\partial^*\mathbb{T}$. En faisant le produit de convolution à gauche, on a que, pour toute fonction f mesurable à support compact,

$$\mu * m_{\Gamma}^d(f) = \int_{\Gamma \times \Gamma} f(g_1 g_2) \mu(dg_1) m_{\Gamma}^d(dg_2) = \int_{\Gamma} q^{\phi(g_1)} \mu(dg_1) m_{\Gamma}^d(f)$$

puisque la fonction $g \mapsto q^{\phi(g)}$ est le module de Γ ; tandis que le deuxième terme devient

$$\begin{aligned} \mu * \bar{\eta}_0 * m_{\mathbb{Z}} * \widehat{m}_2(f) &= \int_{\Gamma \times \text{Hor}(\Gamma) \times \mathbb{Z}} g b s^{\phi} * \widehat{m}_2(f) \mu(dg) \bar{\eta}_0(db) m_{\mathbb{Z}}(d\phi) \\ &= \int_{\Gamma \times \text{Hor}(\Gamma) \times \mathbb{Z}} g b s^{-\phi(g)\phi} * \widehat{m}_2(f) \mu(dg) \bar{\eta}_0(db) m_{\mathbb{Z}}(d\phi) \\ &= \int_{\Gamma \times \text{Hor}(\Gamma) \times \mathbb{Z}} (g \cdot b) s^{\phi} * \widehat{m}_2(f) \mu(dg) \bar{\eta}_0(db) m_{\mathbb{Z}}(d\phi) \\ &= \left(\mu * \bar{\eta}_0 \right) * m_{\mathbb{Z}} * \widehat{m}_2(f) \\ &= \overline{\mu * \eta_0} * m_{\mathbb{Z}} * \widehat{m}_2 \end{aligned}$$

Puisque la mesure ν_0 est aussi μ -invariante à gauche on a alors

$$\nu_0 = \mu * \nu_0 = C_0 \int_{\Gamma} q^{\phi(g_1)} \mu(dg_1) m_{\Gamma}^d + \overline{\mu * \eta_0} * m_{\mathbb{Z}} * \widehat{m}_2$$

et donc par unicité de la représentation intégrale

$$C_0 \int_{\Gamma} q^{\phi(g_1)} \mu(dg_1) = C_0 \quad \text{et} \quad \mu * \eta_0 = \eta_0.$$

Puisque $\mu(\phi) = 0$, alors $\int_{\Gamma} q^{\phi(g_1)} > 1$ et donc $C_0 = 0$ et donc $\eta_0 = m_1$, car on a une seule mesure μ -invariante sur $\partial^*\mathbb{T}$. Ce qui termine la preuve. \square

³puisque $(\bar{m}_2 \times m_{\mathbb{Z}}) = m_{\mathbb{Z}} * \widehat{m}_2$ et $m_{\text{Hor}(\Gamma)} \times m_{\mathbb{Z}} = m_{\Gamma}^d$ est la mesure de Haar à droite de Γ .

CHAPITRE 4

Théorème limite local

Le but de ce chapitre est d'estimer le comportement asymptotique du n -ième produit de convolution d'une mesure de probabilité μ (avec densité et à support compact) sur le groupe affine de l'arbre. Le principal résultat est que si μ a un drift nul et si ν_0 est l'unique mesure bi-invariante, donnée par la Proposition 3.3.1, alors il existe une fonction $c : \mathbb{N} \rightarrow [a, b]$, avec $0 < a \leq b < +\infty$, telle que pour toute fonction f continue à support compact sur Γ

$$(4.0.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c(n) n^{\frac{3}{2}} \mu^{(n)}(f) = \nu_0(f).$$

Pour obtenir ce résultat on aura besoin d'une hypothèse de densité à support compact et de certaines conditions d'irréductibilité (Théorème 4.2.1). On va aussi obtenir des résultats partiels sous des hypothèses plus faibles et valables dans une classe plus grande de groupes. Notamment on va démontrer que pour tout groupe non-unimodulaire, si la loi μ admet une densité qui décroît à l'infini avec une vitesse exponentielle, ses produits de convolution convergent vers zéro au moins aussi vite que $n^{-\frac{3}{2}}$ (Théorème 4.1.3). Ce résultat n'est pas nouveau (cf. [Var94]), mais on en donnera ici une nouvelle démonstration. On pourra aussi montrer que l'ordre $n^{-\frac{3}{2}}$ ne peut pas être amélioré, pour toute une classe de groupes dans lesquels \mathbb{R} a une action dilatante; on remarque que ce résultat requiert des hypothèses beaucoup plus faibles et en particulier on n'aura pas besoin ni d'hypothèses de densité ni d'étalement (Théorème 4.1.4). Par souci de généralité et puisque, d'un point de vu technique les preuves ne sont pas plus lourdes, on a choisi de sortir du stricte cadre du groupe affine de l'arbre et de se placer dans un contexte plus général.

Dans la dernière partie de ce chapitre, on montrera qu'on peut améliorer le théorème limite local (4.0.2) pour le groupe des affinités de \mathbb{Q}_p , grâce à ses propriétés de commutativité et à un comportement plus homogène sur l'arbre. On montrera que dans ce cas la fonction $c(n)$ est constante et on pourra affaiblir les hypothèses.

On traitera seulement le cas de mesures à drift nul, car dans le cas contraire on peut utiliser la transformée de Laplace pour centrer le drift et, ainsi, obtenir des convergences de l'ordre de $\rho^n n^{-\frac{3}{2}}$ avec $\rho \in]0, 1[$.

4.1. Un théorème limite local pour les groupes non-unimodulaires

On va ici estimer le comportement asymptotique des produits de convolution d'une mesure sur un groupe non-unimodulaire quelconque. On montrera en particulier que la mesure d'un compact est asymptotiquement plus petite que $n^{-3/2}$. Ce résultat a déjà été obtenu par une autre méthode par N.Th.Varopoulos en [Var94]; notre preuve par contre sera une généralisation d'un résultat pour le groupe des affinités réelles de E.[LPP97]. Dans un deuxième temps on montrera que pour une certaine classe de groupes l'ordre $n^{-3/2}$ est le meilleur qu'on peut avoir.

4.1.1. Notations et résultats préliminaires. Dans ce qui suit \mathcal{G} sera un groupe topologique localement compact non-unimodulaire. On note dg la mesure de Haar droite de \mathcal{G} et Δ le module pour l'action à gauche, c'est-à-dire que les égalités suivantes sont vérifiées pour toute fonction intégrable f et tout élément $g \in \mathcal{G}$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{G}} f(\gamma g) d\gamma &= \int_{\mathcal{G}} f(\gamma) d\gamma \\ \int_{\mathcal{G}} f(g\gamma) d\gamma &= \Delta(g) \int_{\mathcal{G}} f(\gamma) d\gamma\end{aligned}$$

Par commodité, au lieu de travailler avec le module et le groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* on préfère se ramener au groupe additif en posant :

$$h(g) = -\log(\Delta(g))$$

On considère une suite $\{g_i\}_i$ de variables aléatoires sur \mathcal{G} indépendantes et de même de loi μ ; R_k sera la marche aléatoire droite de loi μ , i.e. le processus défini par récurrence par :

$$R_k = R_{k-1}g_k \quad R_0 = e$$

On notera aussi pour tout $i \leq k \in \mathbb{N}$:

$$R_k^i = g_i \cdots g_k$$

On considère aussi la marche aléatoire induite sur \mathbb{R} par l'homomorphisme h , en posant :

$$h_i = h(g_i) \quad S_k = h(R_k) = \sum_{i=1}^k h_i \quad S_k^i = h(R_k^i)$$

On définit les temps d'échelle l et \bar{l} de la marche aléatoire réelle $S_n = \sum_{i=1}^n h_i$:

$$l = l(h_1, h_2 \dots) = \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\}$$

et

$$\bar{l} = \bar{l}(h_1, h_2 \dots) = \inf\{n \geq 1 : S_n \geq 0\}$$

Finalement on pose :

$$M_n = \max\{S_0, \dots, S_n\} \quad \text{et} \quad M_k^i = \max\{0, S_{i+1}^i, \dots, S_k^i\}$$

On demande aussi à la loi des h_i de satisfaire aux hypothèses nécessaires afin que l'on puisse appliquer le théorème limite local sur \mathbb{R} , en particulier on demandera que la loi μ_h de h_1 soit *apériodique* sur le groupe fermé $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}$ engendré par son support, c'est-à-dire que pour tout sous-groupe fermé \mathcal{L} strictement inclus dans \mathcal{H} et pour tout $k \in \mathcal{H}$ on a $\mathbb{P}[k + h_1 \in \mathcal{L}] < 1$.

La démonstration s'appuie sur des résultats connus pour les marches aléatoires réelles qu'on résume dans le lemme suivant :

LEMME 4.1.1. *On suppose la loi de h_1 apériodique, $\mathbb{E}[h_1^2] = \sigma^2 < +\infty$ et $\mathbb{E}[h_1] = 0$.*

- (1) *Il existe une mesure de Radon, η_1 , sur \mathbb{R} telle que pour toute fonction $f \in C_c(\mathbb{R})$ et pour toute fonction exponentielle du type $f(x) = e^{ax}$ avec $a > 0$ ¹*

$$(4.1.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \mathbb{E}[[l > n], f(S_n)] = \eta_1(f) < +\infty$$

- (2) *Il existe une mesure de Radon, η_2 , sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que pour toute $f \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ et pour toute fonction exponentielle du type $f(x, y) = e^{-ax-by}$ avec $a, b > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \mathbb{E}[f(M_n, M_n - S_n)] = \eta_2(f) < +\infty$$

Le résultat 1. est du à D. Iglehart [Igl74], tandis que 2. est démontré dans [LPP97].

On aura aussi besoin du lemme technique (voir toujours [LPP97] pour une démonstration).

LEMME 4.1.2. *Si les suites $\{n^{\frac{3}{2}}\alpha_n\}_n$ et $\{n^{\frac{3}{2}}b_n\}_n$ convergent vers des limites non nulles alors la suite*

$$n^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^n \alpha_k b_{n-k}$$

converge vers une limite non nulle.

4.1.2. Borne supérieure. Pour montrer que la suite $\mu^{(n)}(K)$ est asymptotiquement inférieure ou égale à $n^{-\frac{3}{2}}$ on utilisera la factorisation de Spitzer-Grincevicius. On va calculer l'espérance $\mathbb{E}[f(R_n)]$ en regardant à quel moment la suite $\{S_k\}_{0 \leq k \leq n}$ atteint pour la première fois son maximum. Si on pose $t_n = \inf\{k \geq 0 : S_k = M_n\}$ on a alors

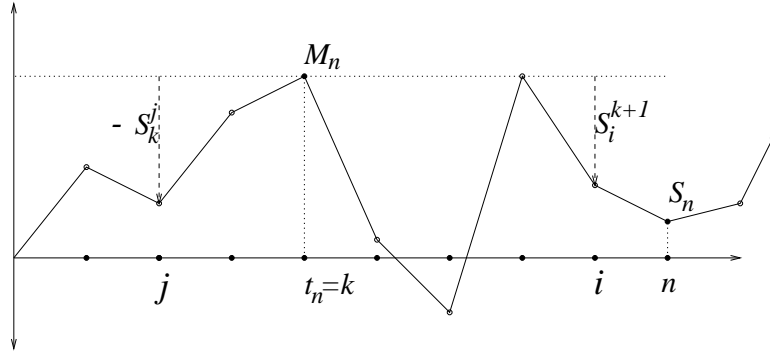
$$\mathbb{E}[f(R_n)] = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[[t_n = k] f(R_n)].$$

¹Pour alléger les notations on utilisera $[A]$ pour indiquer l'indicatrice, $1_{[A]}$, de l'événement A .

On commence par observer que lorsque le maximum M_n est atteint pour la première fois à l'instant k on a :

$$\begin{aligned} [t_n = k] &= [\forall 1 \leq j \leq k, S_k^j > 0] \cap [\forall k < i \leq n, S_i^{k+1} \leq 0] \\ &= [\bar{l}(-h_k, -h_{k-1} \dots) > k] \cap [l(h_{k+1}, h_{k+2} \dots) > n - k] \end{aligned}$$

où les temps d'arrêts l et \bar{l} sont des fonctions des suites entre parenthèses, autrement dit savoir qu'on a atteint le maximum au temps k équivaut à considérer deux marches aléatoires qui partent du maximum et dont l'une descend vers la valeur du départ tandis que la seconde "descend" jusqu'à la valeur finale.



On définit alors des mesures P_l^k et $P_{\bar{l}}^k$ par les formules

$$P_l^k(f) = \mathbb{E}[l > k]f(R_k) \quad P_{\bar{l}}^k(f) = \mathbb{E}[\bar{l} > k]f(R_k)$$

tandis que $\hat{P}_{\bar{l}}^k$ sera la mesure définie à partir d'une marche aléatoire de loi $\hat{\mu}$, image de μ par l'application d'inversion $g \mapsto g^{-1}$. Si on utilise le fait que les variables aléatoires g_i sont indépendantes et que $h(g^{-1}) = -h(g)$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[t_n = k] f(R_n) &= \mathbb{E}[\bar{l}(-h_k, \dots) > k] \cap [l(h_{k+1}, \dots) > n - k] f(R_k^1 R_n^{k+1}) \\ &= \int_{\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}} f(g^{-1}\gamma) \hat{P}_{\bar{l}}^k(dg) P_l^{n-k}(d\gamma) \end{aligned}$$

Donc finalement :

$$\mathbb{E}[f(R_n)] = \sum_{k=0}^n \int_{\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}} f(g^{-1}\gamma) \hat{P}_{\bar{l}}^k(dg) P_l^{n-k}(d\gamma)$$

On a maintenant tous les outils nécessaires pour montrer le résultat annoncé.

THÉORÈME 4.1.3. Soit \mathfrak{G} un groupe non-unimodulaire de module Δ . On pose

$$h(g) = -\log(\Delta(g)).$$

Supposons que la mesure μ admet une densité ψ par rapport à la mesure de Haar droite dg telle que il existe $s \in]1, +\infty[$ et $r \in]0, +\infty[$ tels que

$$\int_{\mathcal{G}} \psi^s(g) 1_{[h(g) < 0]} e^{-rh(g)} dg < +\infty,$$

que la marginale μ_h sur \mathbb{R} soit apériodique, ait un moment d'ordre 2 et que

$$\int_{\mathcal{G}} h(g) \mu(dg) = 0.$$

Alors pour toute fonction $f \in C_c(\mathcal{G})$:

$$\mu^{(n)}(f) = O(n^{-\frac{3}{2}})$$

DÉMONSTRATION. On commence par estimer le comportement de la mesure P_l^k lorsqu'elle est perturbée à gauche par un élément du groupe ; on va montrer que pour toute fonction $f \in C_c(\mathcal{G})$ il existe deux constantes positives, λ et C , telles que pour tout $g \in \mathcal{G}$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(4.1.2) \quad k^{\frac{3}{2}} \int_{\mathcal{G}} f(g^{-1}\gamma) P_l^k(d\gamma) \leq C e^{\lambda h(g)}.$$

Pour montrer cette inégalité on calcule $\mathbb{E}[l > k] f(g^{-1}R_k)$ en décomposant R_k entre ce qui se passe au premier pas et le reste. On observe d'abord que pour tout ε :

$$1_{[l > k]} = 1_{[h_1 \leq 0]} \cdot 1_{[h_1 + M_k^2 \leq 0]} \leq 1_{[h_1 \leq 0]} e^{-2\varepsilon(h_1 + M_k^2)}$$

Grâce à l'indépendance entre g_1 et R_k^2 on a alors :

$$(4.1.3) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}[l > k] f(g^{-1}R_k) &\leq \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_{\mathcal{G}} 1_{[h(g_1) \leq 0]} e^{-2\varepsilon(h(g_1) + M_k^2)} f(g^{-1}(g_1 R_k^2)) \psi(g_1) dg_1 \right] \\ &\leq C_1 e^{-\varepsilon h(g)} \mathbb{E} \left[e^{-2\varepsilon M_k^2 + \varepsilon S_k^2} \int_{\mathcal{G}} 1_{[h(g_1) \leq 0]} e^{-\varepsilon h(g_1)} f(g^{-1}g_1 R_k^2) \psi(g_1) dg_1 \right] \end{aligned}$$

où, dans la dernière égalité, on a utilisé le fait que f peut être majorée par une fonction du type $C_1 e^{\varepsilon h(g)} f(g)$, puisqu'elle est à support compact.

Soit s le nombre réel qui intervient dans l'hypothèse de moment de ψ et soit ε tel que εs soit plus petit que r . Si t est tel que $\frac{1}{t} + \frac{1}{s} = 1$ alors en appliquant

l'inégalité de Cauchy-Schwartz et les propriétés de la mesure de Haar, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{G}} 1_{[-\infty, 0]}(h(g_1)) e^{-\varepsilon h(g_1)} f(g^{-1} g_1 R_k^2) \psi(g_1) dg_1 \\
& \leq \left(\int_{\mathcal{G}} f^t(g^{-1} g_1 R_k^2) dg_1 \right)^{\frac{1}{t}} \left(\int_{\mathcal{G}} 1_{[-\infty, 0]}(h(g_1)) e^{-s\varepsilon h(g_1)} \psi^s(g_1) dg_1 \right)^{\frac{1}{s}} \\
& \leq \left(\Delta(g^{-1}) \int_{\mathcal{G}} f^t(g_1) dg_1 \right)^{\frac{1}{t}} \left(\int_{\mathcal{G}} 1_{[-\infty, 0]}(h(g_1)) e^{-s\varepsilon h(g_1)} \psi^s(g_1) dl_1 \right)^{\frac{1}{s}} \\
& \leq C_2 (\Delta(g^{-1}))^{\frac{1}{t}}.
\end{aligned}$$

En utilisant (4.1.3), on peut trouver une constante C telle que :

$$k^{\frac{3}{2}} \mathbb{E}[|l > k| f(g^{-1} R_k)] \leq C e^{(\frac{1}{t} - \varepsilon)h(g)} k^{\frac{3}{2}} \mathbb{E}\left[e^{-\varepsilon(M_k^2 - S_k^2) - \varepsilon M_k^2} \right].$$

Ainsi si ε est choisi de plus inférieure à $\frac{1}{t}$, de sorte que $\lambda = \frac{1}{t} - \varepsilon > 0$ et on obtient (4.1.2), en observant que le Lemme 4.1.1 garantit que la suite au second membre est bornée .

Grâce à la factorisation de Spitzer-Grincevicius on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(R_n)] &= \sum_{k=1}^n \int_{\mathcal{G} \times \mathcal{G}} f(g^{-1} \gamma) P_l^{n-k}(d\gamma) \hat{P}_l^k(dg) \\
&\leq C \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n-k)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathcal{G}} e^{\lambda h(g)} \hat{P}_l^k(dg)
\end{aligned}$$

Grâce au Lemme 4.1.1, la suite $k^{\frac{3}{2}} \hat{P}_l^k(e^{\lambda h})$ est bornée, et

$$\mathbb{E}[f(R_n)] \leq \sum_{k=1}^n \frac{C_2}{(n-k)^{\frac{3}{2}} k^{\frac{3}{2}}}$$

Cela entraîne, grâce au lemme technique 4.1.2, que $\mu^{(n)}(f)$ est majoré par une suite qui converge vers 0 aussi rapidement que $n^{-\frac{3}{2}}$. \square

4.1.3. Borne inférieure. On va montrer ici que pour une classe de groupes assez vaste l'ordre $n^{-3/2}$ est effectivement le meilleur qu'on puisse espérer.

Dans ce qui suit on supposera que le groupe \mathcal{G} s'écrit comme produit semi-direct du sous-groupe distingué $\mathcal{B} = \ker(h)$ et du sous-groupe fermé $\mathcal{H} = h(\mathcal{G})$ de \mathbb{R} :

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \ltimes \mathcal{B}$$

Donc chaque élément de \mathcal{G} peut être décomposé en $g = (h(g), b(g))$. On notera par A^h l'action de l'élément h de \mathcal{H} sur \mathcal{B} ainsi, le produit sur \mathcal{G} est :

$$(h_1, b_1)(h_2, b_2) = (h_1 + h_2, b_1 A^{h_1} b_2).$$

On demande aussi que l'action de \mathbb{R} soit dilatante sur \mathcal{B} , et plus précisément qu'il existe une semi-norme sur \mathcal{B} , c'est-à-dire une application continue et propre $\|\cdot\| : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

1. il existe une fonction continue strictement croissante $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$(4.1.4) \quad \|b_1 \cdots b_n\| \leq F(\|b_1\| + \cdots + \|b_n\|) \quad \text{pour tout } b_1 \dots b_n \in \mathcal{B}$$

2. Il existe $\rho > 1$ tel que $\|A^h b\| \leq \rho^h \|b\|$ pour tout $h \in \mathcal{H}$ et $b \in \mathcal{B}$.

On observe que, outre que dans le cas des affinités d'un arbre homogène qu'on analysera plus en détail dans la suite, ces conditions sont vérifiées lorsque \mathcal{B} est un groupe de Lie gradué sur lequel $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ agit par dilatations. Dans ce cas la condition 1. est automatiquement satisfaite car \mathcal{B} doit être nilpotent (cf. [FS82]) et donc il existe une fonction polynômiale pour laquelle on a (4.1.4) (cf. [Éli82]).

Si $g_i = (h_i, b_i)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi μ sur \mathcal{G} et R_n est la marche aléatoire droite, on note

$$S_n = h(R_n) \quad \text{et} \quad Z_n = b(R_n).$$

On a alors le résultat suivant

THÉORÈME 4.1.4. *Soit $\mathcal{G} = \mathcal{B} \rtimes \mathcal{H}$ un groupe comme ci dessus. Si*

$$\mathbb{E} \left[\rho^{-\frac{1}{2}h_1} \|b_1\| \right] < +\infty$$

et si la loi de h_1 est apériodique, $\mathbb{E}[h_1^2] = \sigma^2 < +\infty$ et $\mathbb{E}[h_1] = 0$, alors il existe un compact K de \mathcal{G} tel que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \mu^{(n)}(K) > 0.$$

DÉMONSTRATION. On observe d'abord que, en appliquant la loi de composition de \mathcal{G} , on peut écrire :

$$Z_n = b_1 \cdot A^{S_1} b_2 \cdots A^{S_{n-1}} b_n$$

Soit $f \in C_c(\mathbb{R})$ une fonction positive. Pour tout $r > 0$, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[f(S_n)[\|Z_n\| < r]] \leq \\ & \geq \mathbb{E} \left[f(S_n) \left[F \left(\sum_{k=1}^n \|A^{S_{k-1}} b_k\| \right) < r \right] \right] \\ & \geq \mathbb{E} \left[[l > n] f(S_n) \left[\sum_{k=1}^n \|A^{S_{k-1}} b_k\| < F^{-1}(r) \right] \right] \\ & = \mathbb{E}[[l > n] f(S_n)] - \mathbb{E} \left[[l > n] f(S_n) \left[\sum_{k=1}^n \|A^{S_{k-1}} b_k\| < F^{-1}(r) \right] \right] \\ & \geq \mathbb{E}[[l > n] f(S_n)] - \frac{1}{F^{-1}(r)} \mathbb{E} \left[[l > n] f(S_n) \left(\sum_{k=1}^n \|A^{S_{k-1}} b_k\| \right) \right]. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 4.1.1, ceci va nous permettre de conclure que

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \mathbb{E}[f(S_n) [\|Y_n\| < r]] \geq \\ & \geq \eta_1(f) - \frac{1}{F^{-1}(r)} \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \mathbb{E} \left[[l > n] f(S_n) \left(\sum_{k=1}^n \|A^{S_{k-1}} b_k\| \right) \right]. \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse de moment, on va montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(4.1.5) \quad n^{\frac{3}{2}} \mathbb{E} \left[[l > n] f(S_n) \left(\sum_{k=1}^n \|A^{S_{k-1}} b_k\| \right) \right] \leq C$$

En choisissant $r > F\left(\frac{C}{\eta_1(f)}\right)$, le théorème sera prouvé avec

$$K = \{b \in \mathcal{B} : \|b\| \leq r\} \times \text{supp} f$$

qui est compact car la fonction $\|\cdot\|$ est propre.

Il reste à vérifier (4.1.5). En appliquant la propriété de dilatation, on obtient :

$$\mathbb{E} \left[[l > n] f(S_n) \left(\sum_{k=1}^n \|A^{S_{k-1}} b_k\| \right) \right] \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [[l > n] f(S_n) \rho^{S_{k-1}} \|b_k\|]$$

On va décomposer la fonction dont on veut estimer l'espérance en produit de deux fonctions dont une ne dépend que de ce qui se passe avant l'instant k et l'autre de ce qui se passe après k . Premièrement on observe qu'il existe une constante C_1 telle que la fonction à support compact $f(h)$ est majorée par $C_1 \rho^h$ et en suite on décompose l'événement $[l > n]$ en utilisant les variables aléatoires M_n^k et S_n^k :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [[l > n] f(S_n) \rho^{S_{k-1}} \|b_k\|] \leq C_1 \mathbb{E} [[l > n] \rho^{S_n + S_{k-1}} \|b_k\|] \\ & = C_1 \mathbb{E} [[l > k-1] \cap [S_{k-1} + h_k + M_n^{k+1} < 0] \rho^{S_n + S_{k-1}} \|b_k\|] \\ & \leq C_1 \mathbb{E} [[l > k-1] e^{-\frac{3}{2}(S_{k-1} + h_k + M_n^{k+1})} \rho^{2S_{k-1} + h_k + S_n^{k+1}} \|b_k\|] \\ & = C_1 \mathbb{E} [[l > k-1] \rho^{\frac{1}{2}S_{k-1}}] \mathbb{E} [\rho^{-\frac{1}{2}h_k} \|b_k\|] \mathbb{E} [\rho^{-\frac{3}{2}M_n^{k+1} + S_n^{k+1}}] \\ (4.1.6) \quad & = C_2 \mathbb{E} [[l > k-1] \rho^{\frac{1}{2}S_{k-1}}] \mathbb{E} [\rho^{(S_{n-k} - M_{n-k}) - \frac{1}{2}M_{n-k}}] \end{aligned}$$

où $C_2 = C_1 \mathbb{E} [\rho^{-\frac{h_k}{2}} \|b_k\|]$. En utilisant les propriétés de convergence des marches aléatoires réelles énoncé au lemme 4.1.1 et le lemme technique 4.1.2, on prouve que $n^{\frac{3}{2}} \mathbb{E} [[l > n] f(S_n) \left(\sum_{k=1}^n \|A^{S_{k-1}} b_k\| \right)]$ est majorée par une suite convergente et est donc bornée. \square

Pour garantir que pour toute fonction à support compact $n^{-\frac{3}{2}}$ est l'ordre minimale de convergence, il faut introduire des hypothèses sur le support de μ . On a alors

COROLLAIRE 4.1.5. *Sous les hypothèses du Théorème précédent, si on suppose de plus que la mesure μ est irréductible et que le support de μ contient un voisinage de e , on a que pour toute $f \in C_c(\mathcal{G})$ positive*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \mu^{(n)}(f) > 0$$

DÉMONSTRATION. Soit $U = \text{supp}\mu$, alors puisque U contient un voisinage de l'unité

$$\text{supp}\mu^{(n+1)} = U^{n+1} = U^n U \supseteq U^n = \text{supp}\mu^{(n)}$$

donc $\{\text{supp}\mu^{(n)}\}_n$ est une suite d'ensembles croissante qui converge vers le groupe tout entier \mathcal{G} parce que la mesure est irréductible. Si K est un ensemble compact tel que $n^{\frac{3}{2}} \mu^{(n)}(K)$ est borné inférieurement loin de zéro, alors il existe n_0 tel que

$$K^{-1} \text{supp}f \subset \text{supp}\mu^{(n_0)}$$

On considère la fonction

$$g \mapsto g * \mu^{(n_0)}(f)$$

qui est continue et non nulle pour tout $g \in K$, car $\text{supp}(g * f) = g^{-1} \text{supp}f$ est contenu dans le support de $\mu^{(n_0)}$. Puisque K est compact il existe une constante positive C_0 telle que

$$g * \mu^{(n_0)}(f) \geq C_0 1_K(g)$$

On peut donc conclure

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \mu^{(n)}(f) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (n + n_0)^{\frac{3}{2}} \mu^{(n)} * \mu^{(n_0)}(f) \geq C_0 \liminf_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \mu^{(n)}(K) > 0$$

□

4.2. Le cas des affinités d'un arbre

Les sous-groupes non-exceptionnels Γ de $\text{Aff}(\mathbb{T})$ sont des exemples auxquels on va pouvoir appliquer les résultats précédents.

En effet par l'hypothèse de non-exceptionnalité, on sait que le groupe Γ est non-unimodulaire, et donc on peut appliquer tout suite le Théorème 4.1.3.

On sait aussi que le module de la mesure de Haar de Γ est $\Delta(g) = (\tilde{q}^{1/\tau})^{\phi(g)}$ (voir section 1.2), on pose donc

$$h(g) = -\frac{\log \tilde{q}}{\tau} \phi(g).$$

D'autre part on peut décomposer Γ comme produit semi-direct $\text{Hor}(\Gamma) \rtimes \tau\mathbb{Z}$, en posant $(b, \phi) = bs^\phi$, pour tout s tel que $\phi(s) = 1$ et $s^\tau \in \Gamma$. Quitte à appliquer un homomorphisme à \mathbb{Z} , si on pose $\mathcal{H} = \log \tilde{q} \mathbb{Z}$ on a

$$\begin{aligned} \text{Hor}(\Gamma) \rtimes \mathcal{H} &\cong \Gamma \\ (b, h) &\mapsto bs^{-\frac{\tau}{\log \tilde{q}} h} \end{aligned}$$

où l'action de \mathcal{H} sur $\text{Hor}(\Gamma)$, devient

$$A^h b = s^{-\frac{\tau}{\log \tilde{q}} h} b s^{\frac{\tau}{\log \tilde{q}} h}$$

Soit $\alpha \in \partial^* \mathbb{T}$ tel que $s\alpha = \alpha$. On définit sur $\text{Hor}(\Gamma)$ l'application

$$\|b\| = \Theta(b\alpha, \alpha) = \Theta(\alpha, b^{-1}\alpha)$$

On a alors

$$\|b_1 b_2\| = \Theta(b_1 b_2 \alpha, \alpha) = \Theta(b_2 \alpha, b_1^{-1} \alpha) \leq \Theta(b_2 \alpha, \alpha) + \Theta(\alpha, b_1^{-1} \alpha) = \|b_1\| + \|b_2\|$$

et

$$\begin{aligned} \|A^h b\| &= \Theta(s^{-\frac{\tau}{\log q} h} b s^{\frac{\tau}{\log q} h} \alpha, \alpha) = \Theta(s^{-\frac{\tau}{\log q} h} b \alpha, s^{-\frac{\tau}{\log q} h} \alpha) \\ &= q^{\frac{\tau}{\log q} h} \|b\| = \rho^h \|b\| \end{aligned}$$

où $\rho = q^{\frac{\tau}{\log q}}$. Clairement l'application $\|\cdot\|$ est continue, et de plus pour tout nombre $m \in \mathbb{Z}$ l'ensemble

$$\{b \in \text{Hor}(\Gamma) : \|b\| \leq q^m\} = \{b \in \text{Hor}(\Gamma) : b\alpha^m = \alpha^m\} = V(\alpha^m)$$

est compact. Ce qui prouve qu'on peut appliquer à Γ le Théorème 4.1.4, qui nous donne la borne inférieure pour le théorème limite local.

Si on renforce les hypothèses on peut obtenir au lieu d'un simple encadrement une vraie convergence. On a en effet

THÉORÈME 4.2.1. *Supposons que la mesure μ est irréductible, qu'elle a une densité continue à support compact et ouvert et que son support contient un voisinage de l'identité. Alors si $\mu(\phi) = 0$, il existe une fonction $c : \mathbb{N} \rightarrow [a, b]$, avec $0 < a \leq b < +\infty$ et une mesure ν_0 satisfaisant*

$$\mu * \nu_0 = \nu_0 * \mu = \nu_0,$$

(qui est unique à une constante multiplicative près) telle que pour toute $f \in C_c(\Gamma)$

$$(4.2.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c(n) n^{\frac{3}{2}} \mu^{(n)}(f) = \nu_0(f).$$

DÉMONSTRATION. Puisque le support de μ contient un voisinage de e on voit tout de suite qu'il existe une constante $c_0 > 0$ telle que $\mu^{(2)} \geq c_0 \mu$. En plus on sait (Corollaire 4.1.5) que pour toute fonction f , continue positive et à support compact, la suite $n^{\frac{3}{2}} \mu^{(n)}(f)$ est bornée inférieurement loin de zéro et donc puisque μ est une probabilité

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu^{(n)}(f))^{\frac{1}{n}} = 1$$

Le résultat de Y. Guivarc'h, [Gui80] Proposition 3, garantit alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu^{(n+1)}(f)}{\mu^{(n)}(f)} = 1.$$

Si on fixe une fonction $F \in C_c^+(\Gamma)$, alors la suite de mesures

$$\nu_n = \frac{\mu^{(n)}}{\mu^{(n)}(F)}$$

est vaguement relativement compacte grâce au Théorème 4.1.3 et au Corollaire 4.1.5 . Soit ν' est un point d'accumulation de la suite ν_n on a alors

$$\mu * \nu'(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu^{(n_k+1)}(f)}{\mu^{(n_k)}(F)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu^{(n_k)}(f)}{\mu^{(n_k)}(F)} = \nu'(f).$$

De la même façon on montre que ν' est μ -invariante à droite. Puisque de plus $\nu'(F) = 1$, on a forcément que $\nu' = \nu_0$, où ν_0 est l'unique mesure bi-invariante (Proposition 3.3.1) telle que $\nu_0(F) = 1$. Donc les mesures ν_n convergent vers ν_0 et puisque $\mu^{(n)}(F) = c(n)n^{\frac{3}{2}}$ pour une suite $c(n)$ bornée et avec limite inférieure strictement positive, on conclut. \square

4.3. Un théorème limite local précisé pour $\text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$ et $\text{Aff}(\mathbb{Z}_q)$

Dans la section précédente on a montré que la vitesse de convergence du produit de convolution d'une mesure de probabilité sur le groupe affine de l'arbre est $n^{-\frac{3}{2}}$ à une suite bornée $c(n)$ près. On soupçonne que, puisque on est en train d'étudier une marche aléatoire sur un groupe, la suite $c(n)$ est en réalité une suite constante, mais nous n'avons pu le démontrer que dans le cas où le groupe Γ est "suffisamment commutatif". On va supposer dans cette section que le groupe Γ satisfait aux conditions suivantes

- (i) Le stabilisateur, \mathcal{A} , dans Γ d'une extrémité $\alpha \in \partial^* \mathbb{T}$ est commutatif et est donc le produit direct d'un groupe abélien compact K_α et de \mathbb{Z} .
- (ii) Γ est le produit semi direct d'un sous-groupe abélien distingué \mathcal{J} contenu dans $\text{Hor}(\Gamma)$ et du stabilisateur, $\mathcal{A} = K_\alpha \times \mathbb{Z}$.

Ces conditions sont vérifiées en particulier par $\text{Aff}(\mathbb{Q}_p)$ et $\text{Aff}(\mathbb{Z}_q)$. Dans ce cas on peut appliquer les techniques utilisées dans le cas du groupe affine réel dans [LPP97] pour monter une convergence exacte.

THÉORÈME 4.3.1. *Si le groupe satisfait aux conditions ci dessus et si les hypothèses du Théorème 4.2.1 sont vérifiées², alors pour toute $f \in C_c(\Gamma)$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \mu^{(n)}(f) = \nu_0(f)$$

où ν_0 est l'unique mesure bi-invariante.

DÉMONSTRATION. On doit montrer qu'au moins pour une fonction $F \in C_c^+(\Gamma)$, non nulle, la suite $n^{\frac{3}{2}} \mu^{(n)}(F)$ converge. La factorisation de Spitzer-Grincevicius nous dit que

$$\mathbb{E}[F(R_n)] = \sum_{k=0}^n \int_{\Gamma \times \Gamma} F(g^{-1}\gamma) \hat{P}_l^k(dg) P_l^{n-k}(d\gamma) = \sum_{k=0}^n I_{k,n-k},$$

²Dans ce cas, les hypothèses de support compact et d'irréductibilité ne sont plus indispensables, il suffirait d'une densité à décroissance exponentielle. Pourtant, dans ce cas, on ne pourrait pas garantir que la mesure limite soit la mesure bi-invariante.

et on a montré dans la preuve du Théorème 4.1.3 qu'il existe une constante C_1 telle que pour tout n et k les termes $I_{k,n-k}$ de la somme sont majorés par $C_1(k(n-k))^{-\frac{3}{2}}$. Comme on a vu, le Lemme 4.1.2 garantit que alors $n^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^n I_{k,n-k}$ est majoré par une suite convergente. On remarque tout d'abord que la limite de cette suite ne dépend en fait que des queues de la somme; en effet il existe une constante C_2 tel que pour tout i, j et n dans \mathbb{N}

$$(4.3.1) \quad n^{\frac{3}{2}} \sum_{k=i}^{n-j} (k(n-k))^{-\frac{3}{2}} \leq C_2 \left(\frac{1}{\sqrt{i}} + \frac{1}{\sqrt{j}} \right);$$

(voir par exemple [LPP97]). Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, si on prend i et j suffisamment grands, on a

$$n^{\frac{3}{2}} \left| \mathbb{E}[F(R_n)] - \sum_{k=0}^i I_{k,n-k} - \sum_{k=n-j+1}^n I_{k,n-k} \right| \leq \varepsilon$$

Pour montrer que $n^{\frac{3}{2}} \mu^{(n)}(F)$ converge il suffit donc de montrer que pour tout i et j fixés les suites

$$n^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^i I_{k,n-k} \quad \text{et} \quad n^{\frac{3}{2}} \sum_{k=n-j+1}^n I_{k,n-k}$$

convergent. On considérera ici seulement la première suite; par symétrie, la convergence de la deuxième se montre de façon analogue. Puisque i est fixé, il suffit de montrer que pour tout k

$$n^{\frac{3}{2}} I_{k,n-k} = \int_{\Gamma} \left(n^{\frac{3}{2}} \int_{\Gamma} F(g^{-1}\gamma) P_l^{n-k}(d\gamma) \right) \hat{P}_l^k(dg)$$

converge. On a vu (cf. (4.1.2)) que le terme entre parenthèses est majoré par la fonction $Ce^{\lambda h(g)}$, avec $\lambda > 0$, qui est naturellement intégrable par la probabilité \hat{P}_l^k qui ne charge que l'ensemble des $g \in \Gamma$ tels que $h(g) \leq 0$. Par convergence dominée on se ramène donc à démontrer la convergence de

$$n^{\frac{3}{2}} \int_{\Gamma} F(g^{-1}\gamma) P_l^{n-k}(d\gamma)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $g \in \Gamma$ fixés.

Soit Γ le produit semi direct d'un sous-groupe abélien distingué \mathcal{T} contenu dans $\text{Hor}(\Gamma)$ et du stabilisateur, \mathcal{A} , d'un bout $\alpha \in \partial^*\Gamma$. On appelle t et a les projections respectives de Γ sur \mathcal{T} et \mathcal{A} et on note $g \cdot$ l'action d'un élément $g \in \Gamma$ sur \mathcal{T} . Puisque \mathcal{T} est homéomorphe au bord $\partial^*\mathbb{T}$, il peut être équipé de la distance Θ du bord en posant

$$\Theta(t_1, t_2) := \Theta(t_1\alpha, t_2\alpha)$$

qui est homogène sur \mathcal{T} . On observe que $\|t\| = \Theta(t, e)$ est une vraie norme symétrique sur \mathcal{T} et que

$$\begin{aligned}\Theta(g \cdot t_1, g \cdot t_2) &= \Theta(gt_1g^{-1}\alpha, gt_2g^{-1}\alpha) = q^{-\phi(g)}\Theta(t_1t(g^{-1})\alpha, t_2t(g^{-1})\alpha) \\ &= q^{-\phi(g)}\Theta(t(g^{-1})t_1\alpha, t(g^{-1})t_2\alpha) = q^{-\phi(g)}\Theta(t_1, t_2).\end{aligned}$$

On considère une fonction F sur Γ de la forme

$$(4.3.2) \quad F(\gamma) = f_t(t(\gamma))f_\phi(\phi(\gamma))$$

avec f_t une fonction lipshitzienne à support compact sur (\mathcal{T}, Θ) et $f_\phi \in C_c(\mathbb{Z})$. La fonction F est évidemment continue à support compact et pour tout $g \in \Gamma$ la fonction

$$g * F(\gamma) = f_t(g \cdot t(\gamma))f_\phi(\phi(g) + \phi(\gamma))$$

est encore le produit d'une fonction lipshitzienne sur \mathcal{T} et d'une fonction sur \mathbb{Z} . Donc, compte tenu de tout ce qui a été dit ci dessus, pour terminer la preuve il suffit de montrer que pour toute fonction de la forme (4.3.2) la limite

$$(4.3.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \int_{\Gamma} F(\gamma) P_l^n(d\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \mathbb{E}[[l > n]F(R_n)]$$

existe.

On rappelle que, dans cette section, on a noté

$$S_n = -\frac{\log \tilde{q}}{\tau} \phi(R_n)$$

Si $t_i = t(X_i)$ et si on note Z_n la projection de R_n sur \mathcal{T} on a

$$(4.3.4) \quad Z_n = t(R_n) = t_1 a(R_1) \cdot t_2 \cdots a(R_{n-1}) \cdot t_n.$$

On a vu en (4.1.6) qu'il existe une constante C_3 telle que pour tout k

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[[l > n]f_\phi(\phi(R_n)) \|a(R_{k-1}) \cdot t_k\|] &= \mathbb{E}[[l > n]f_\phi(\phi(R_n))q^{-\phi(R_{k-1})} \|t_k\|] \\ &= \mathbb{E}[[l > n]f_S(S_n)\rho^{S_{k-1}} \|t_k\|] \\ &\leq C_3(k(n-k))^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

L'espérance de la norme de Z_n par rapport à la mesure P_l^n , si $\phi(R_n)$ est dans un compact, est donc majorée par une somme de termes $(k(n-k))^{-\frac{3}{2}}$ et donc on va voir que, grâce à (4.3.1), le comportement de Z_n ne va dépendre que des premiers et derniers termes du produit (4.3.4). En effet pour tout i et j puisque \mathcal{T} est commutatif on a

$$\begin{aligned}Z_n &= t(R_n) = t(R_i R_{n-j}^{i+1} R_n^{n-j+1}) \\ &= t(R_i) a(R_i) \cdot t(R_{n-j}^{i+1}) a(R_{n-j}) \cdot t(R_n^{n-j+1}) \\ &= t(R_i) a(R_{n-j}) \cdot t(R_n^{n-j+1}) a(R_i) \cdot t(R_{n-j}^{i+1})\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} & |f_t(t(R_n)) - f_t(t(R_i) a(R_{n-j}) \cdot t(R_n^{n-j+1}))| \leq \\ 0 & \leq C_4 \|a(R_i) \cdot t(R_{n-j}^{i+1})\| \quad \text{où } C_4 \text{ est le coefficient de Lipshitz de } f \\ & \leq C_4 \sum_{k=i+1}^{n-j} \rho^{S_{k-1}} \|t_k\|; \end{aligned}$$

Par conséquent il existe une constante C_5 telle que pour tout i, j et n

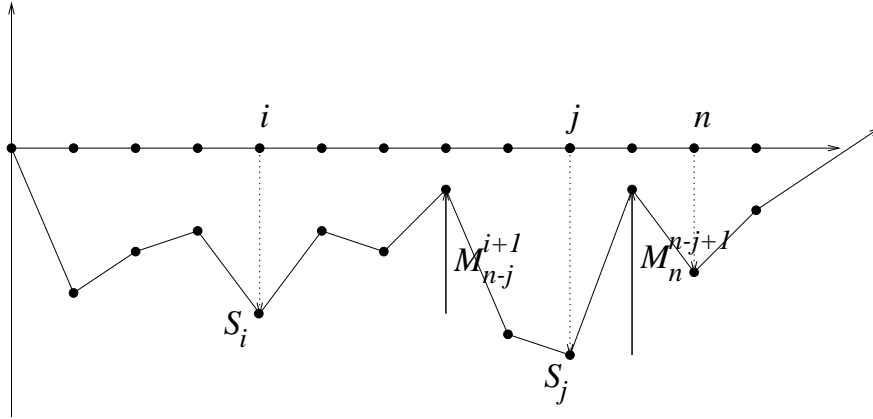
$$\begin{aligned} n^{\frac{3}{2}} |\mathbb{E}[l > n] f_\phi(\phi(R_n)) (f_t(t(R_n)) - f_t(t(R_i) a(R_{n-j}) t(R_n^{n-j+1})))]| & \leq \\ & \leq C_5 \left(\frac{1}{\sqrt{i}} + \frac{1}{\sqrt{j}} \right) \end{aligned}$$

Pour montrer que la limite (4.3.3) existe il suffit de montrer que pour tout i et j fixés la suite

$$\begin{aligned} \nu_n & = n^{\frac{3}{2}} \mathbb{E}[l > n] f_\phi(\phi(R_n)) f_t(t(R_i) a(R_{n-j}) t(R_n^{n-j+1})) \\ & = n^{\frac{3}{2}} \mathbb{E}[l > n] f_\phi(\phi(R_i R_{n-j}^{i+1} R_n^{n-j+1})) f_t(t(R_i) a(R_i R_{n-j}^{i+1}) t(R_n^{n-j+1})) \end{aligned}$$

converge avec l'avantage maintenant que cette suite ne dépend presque que de la composante a de R_{n-j}^i . En effet si on décompose la fonction dont on veut calculer l'espérance en trois parts, en séparant ce qui se passe entre 1 et i , puis entre $i+1$ et $n-j$, et enfin entre $n-j+1$ et n , on a

$$[l > n] = [M_i^1 \leq 0] \cap [S_i + M_{n-j}^{i+1} \leq 0] \cap [S_i + S_{n-j}^{i+1} + M_n^{n-j+1} \leq 0].$$



Si on conditionne par rapport aux premiers i et aux derniers j pas de la marche, on obtient grâce à l'indépendance des pas

$$\nu_n = \mathbb{E}[f_n(R_i, M_i, R_n^{n-j+1}, M_n^{n-j+1})] = \mathbb{E}[f_n(R_i, M_i, R_{i+j}^{i+1}, M_{i+j}^{i+1})]$$

où

$$\begin{aligned} f_n(g_1, m_1, g_2, m_2) &= \\ &= n^{\frac{3}{2}} \mathbb{E} \left[[m_1 \leq 0, M_{n-j}^{i+1} \leq -\phi(g_1), S_{n-j}^{i+1} \leq -\phi(g_1) - m_2] \right. \\ &\quad \left. f_\phi(\phi(g_1) + S_{n-j}^{i+1} + \phi(g_2)) f_t(t(g_1) a(g_1) a(R_{n-j}^{i+1}) t(g_2)) \right]. \end{aligned}$$

Cette fonction est une moyenne d'un produit d'une fonction à support compact qui ne dépend que de la composante a de la marche aléatoire et d'une fonction à support compact du maximum de la projection réel. On peut montrer que dans une telle situation on a un résultat qui généralise au produit direct de \mathbb{Z} avec un groupe abélien compact le Lemme 4.1.1 pour \mathbb{Z} qu'on a souvent utilisé. Le paragraphe suivant est dédié à cette généralisation, qui est une peu longue et technique. En particulier on montrera dans la Proposition 4.3.8 que $f_n(g_1, m_1, g_2, m_2)$ converge pour tout g_1, m_1, g_2 et m_2 fixés.

Pour montrer que ν_n converge et, donc, conclure la preuve du théorème il suffit de montrer que on peut appliquer le principe de convergence dominée. On vérifie facilement que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante C telle que

$$f_n(g_1, m_1, g_2, m_2) \leq C \left(e^{-\frac{3\varepsilon}{2}\phi(g_1)} e^{\varepsilon\phi(g_2)} \right) \left(n^{\frac{3}{2}} \mathbb{E} \left[e^{\frac{\varepsilon}{2} S_{n-j-i} - 2\varepsilon M_{n-j-i}} \right] \right).$$

Le deuxième terme de ce dernier produit est une suite convergente (Lemme 4.1.1) et puisque la mesure μ est à support compact, on a

$$\mathbb{E} \left[e^{-\frac{3\varepsilon}{2} S_i} e^{\varepsilon S_{i+j}^{i+1}} \right] < \infty$$

et on conclut. □

4.3.1. Quelques résultats de limite locale pour $\mathbb{R} \times \mathcal{K}$. Le but de cette section est de généraliser les résultats du Lemme 4.1.1 à un produit direct de \mathbb{Z} et d'un groupe abélien compact \mathcal{K} . En particulier, on veut montrer que la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \mathbb{E} [f_1(M_n) f_2(a(R_n))]$$

existe pour toute fonction $f_1 \in C_c(\mathbb{Z})$ et $f_2 \in C_c(\mathbb{Z} \times K_\alpha)$; mais pour faire ceci on devra obtenir toute une série de résultats préliminaires en suivant les traces des résultats analogues dans le cas réel qu'on trouve dans Spitzer [Spi64], Iglehart [Igl74] et Le Page-Peigné [LPP97].

Notations. Soit \mathcal{A} le groupe topologique obtenu comme produit direct d'un sous-groupe fermé \mathcal{H} de $(\mathbb{R}, +)$ avec un groupe topologique abélien compact \mathcal{K} . On se servira des outils de l'analyse de Fourier sur les groupes et on introduit donc les notations dont on aura besoin par la suite. On fera référence en particulier aux livres de L.H.Loomis [Loo53] et de W.Rudin [Rud62].

$\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$ sera l'ensemble des mesures positives et $\mathcal{M}_b(\mathcal{A})$ sera l'ensemble des mesures complexes régulières sur les boréliens de \mathcal{A} à variation totale finie. $L^1(\mathcal{A})$ sera la classe des fonctions intégrables par rapport à la mesure de Haar de \mathcal{A} , qu'on notera da .

Le *dual* du groupe abélien localement compact \mathcal{A} , c'est-à-dire l'ensemble des homomorphismes continus, ou *caractères*, de \mathcal{A} sur le tore complexe $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ sera noté $\hat{\mathcal{A}}$. La *transformée de Fourier* d'une fonction $f \in L^1(\mathcal{A})$ est la fonction de $\hat{\mathcal{A}}$ définie par :

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{\mathcal{A}} f(a) \overline{\gamma(a)} da,$$

de même la transformée de Fourier de $\mu \in \mathcal{M}_b(\mathcal{A})$ est la fonction de $\hat{\mathcal{A}}$:

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_{\mathcal{A}} \overline{\gamma(a)} \mu(da)$$

On notera par $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions définies positives de \mathcal{A} . Le Théorème de Bochner dit que $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ coïncide avec l'ensemble des fonctions f qui peuvent s'écrire :

$$\hat{f}(x) = \int_{\hat{\mathcal{A}}} \gamma(x) \nu(d\gamma)$$

pour une mesure $\nu \in \mathcal{M}_b(\hat{\mathcal{A}})$.

On considère une suite de variables aléatoires, $a_i = (h_i, k_i)$ sur $\mathcal{A} = \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ indépendantes et de loi μ . On note R_n la marche aléatoire de loi μ sur \mathcal{A} , c'est-à-dire le processus défini par récurrence par :

$$R_n = R_{n-1} a_n = (h_1 + \cdots + h_n, k_1 \cdots k_n)$$

et $R_0 = e$. On note $S_n = h_1 + \cdots + h_n$ la marche aléatoire sur \mathcal{H} induite par projection de R_n .

On suppose que μ est apériodique, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de sous-groupe propre \mathcal{J} de \mathcal{A} et d'élément $g \in \mathcal{A}$ tels que

$$\mathbb{P}[a_1 \in g\mathcal{J}] = 1$$

On suppose que μ_1 , la marginale sur \mathcal{H} de μ , est de moyenne nulle et admet un moment d'ordre 2 de façon que l'on puisse appliquer le théorème limite local sur la composante sur \mathbb{R} de la marche aléatoire R_n .

Résultats préliminaires. On énonce ici deux résultats classiques dont on aura besoin dans la suite. Le premier pas est de montrer que $\mu^{(n)}$, le n -ième produit de convolution de μ diffère de sa marginale sur \mathcal{H} , $\mu_1^{(n)}$, par quelque chose qui décroît avec une vitesse au moins exponentielle.

LEMME 4.3.2. *Soit $\mu(da)$ une mesure de probabilité apériodique de \mathcal{A} . Alors pour tout $f \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \cap L^1(\mathcal{A})$ tel que \hat{f} est à support compact*

$$(4.3.5) \quad \left| \mu^{(n)}(f) - \mu_1^{(n)}(f_1) \right| \leq \lambda c^n$$

où λ est une constante finie que ne dépend que de f , la constante c est strictement plus petite de 1 et

$$f_1(h) = \int_{\mathcal{K}} f(h, k) dk$$

DÉMONSTRATION. Sous l'hypothèse $f \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \cap L^1(\mathcal{A})$ le théorème d'inversion (cf. par exemple [Loo53, page 143]) nous garantit qu'il existe une normalisation de la mesure de Haar de $\hat{\mathcal{A}}$ tel que on peut écrire pour toute mesure de probabilité :

$$\begin{aligned} \mu(f) &= \int_{\mathcal{A}} f(a) \mu(da) = \int_{\mathcal{A}} \int_{\hat{\mathcal{A}}} \hat{f}(\gamma) \gamma(a) d\gamma \mu(da) = \\ &= \int_{\hat{\mathcal{A}}} \hat{f}(\gamma) \int_{\mathcal{A}} \overline{\gamma(a)} \mu(da) d\gamma = \int_{\hat{\mathcal{A}}} \hat{f}(\gamma) \overline{\hat{\mu}(\gamma)} d\gamma \end{aligned}$$

Comme la transformée de Fourier transforme le produit de convolution en produit ordinaire et que $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{H}} \times \hat{\mathcal{K}}$ on a :

$$\mu^{(n)}(f) = \int_{\hat{\mathcal{H}} \times e_{\hat{\mathcal{K}}}} \hat{f}(\gamma) \overline{\hat{\mu}(\gamma)}^n d\gamma + \int_{\hat{\mathcal{A}} - (\hat{\mathcal{H}} \times e_{\hat{\mathcal{K}}})} \hat{f}(\gamma) \overline{\hat{\mu}(\gamma)}^n d\gamma$$

On peut récrire le premier terme comme une moyenne par rapport à la marginale sur \mathcal{H} de μ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\mathcal{H}} \times e_{\hat{\mathcal{K}}}} \hat{f}(\gamma) \overline{\hat{\mu}(\gamma)}^n d\gamma &= \int_{\hat{\mathcal{H}}} \hat{f}(\theta, e_{\hat{\mathcal{K}}}) \overline{\hat{\mu}(\theta, e_{\hat{\mathcal{K}}})}^n d\theta \\ &= \int_{\hat{\mathcal{H}}} \left(\int_{\mathcal{H} \times \mathcal{K}} f(h, k) \overline{\theta(h) e_{\hat{\mathcal{K}}}(k)} dh dk \right) \left(\int_{\mathcal{H} \times \mathcal{K}} \overline{\theta(h) e_{\hat{\mathcal{K}}}(k)} \mu(dh dk) \right)^n d\theta \\ &= \int_{\hat{\mathcal{H}}} \hat{f}_1(\theta) \overline{\hat{\mu}_1(\theta)}^n = \mu_1^{(n)}(f_1) \end{aligned}$$

On observe que dans la dernière ligne on a pu appliquer le théorème d'inversion parce que si $f \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \cap L^1(\mathcal{A})$ on peut facilement vérifier que $f_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \cap L^1(\mathcal{H})$.

On peut ensuite estimer l'écart entre μ et μ_1 en majorant l'intégrale :

$$\left| \int_{\hat{\mathcal{A}} - (\hat{\mathcal{H}} \times e_{\hat{\mathcal{K}}})} \hat{f}(\gamma) \overline{\hat{\mu}(\gamma)}^n d\gamma \right| \leq \left(\sup_{\gamma \in (\hat{\mathcal{A}} - \hat{\mathcal{H}} \times e_{\hat{\mathcal{K}}}) \cap \text{supp} \hat{f}} |\hat{\mu}(\gamma)| \right)^n \int_{\hat{\mathcal{A}}} |\hat{f}(\gamma)| d\gamma;$$

comme on sait déjà que la norme de \hat{f} en $L^1(\hat{\mathcal{A}})$ est finie il ne reste qu'à montrer que

$$c = \sup_{\gamma \in (\hat{\mathcal{A}} - \hat{\mathcal{H}} \times e_{\hat{\mathcal{K}}}) \cap \text{supp} \hat{f}} |\hat{\mu}(\gamma)| < 1.$$

L'hypothèse d'apériodicité de μ implique que, pour tout $\gamma \in \hat{\mathcal{A}} - e_{\hat{\mathcal{A}}}$, presque sûrement $\gamma(a_1)$ n'est pas constante et donc on peut facilement voir que :

$$|\hat{\mu}(\gamma)| = \left| \mathbb{E} \left[\overline{\gamma(a_1)} \right] \right| < \mathbb{E} [|\gamma(a_1)|] = 1$$

D'autre part, \mathcal{K} étant compact, $\hat{\mathcal{K}}$ est discret et donc $\hat{\mathcal{H}} \times e_{\hat{\mathcal{K}}}$ est un voisinage ouvert de $e_{\hat{\mathcal{A}}}$. Donc puisque $\hat{\mu}$ est continue et $\text{supp} f$ est compact, on peut facilement conclure que $c < 1$ \square

Pour montrer la convergence vague de mesures sur \mathcal{A} , on utilisera souvent le lemme suivant qui généralise un résultat classique sur \mathbb{R} (cf. par exemple [Bre68]) :

LEMME 4.3.3. *Soit $\mathcal{A} = \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ avec \mathcal{K} compact et ν^n, ν des mesures dans $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$. S'il existe une fonction, h_0 , continue sur \mathcal{H} , strictement positive et ν -intégrable telle que pour tout $\gamma \in \hat{\mathcal{A}}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu^n(\gamma h_0) = \nu(\gamma h_0)$$

alors la suite ν^n converge vaguement vers ν .

DÉMONSTRATION. Si $\nu(h_0) = 0$ alors pour tout compact C de \mathcal{A} $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu^n(C) = 0$, c'est-à-dire que la suite ν^n converge vaguement vers 0. On suppose donc $\nu(h_0) > 0$ et on considère la suite de mesures de probabilité définies par

$$\eta^n(f) = \frac{\nu^n(fh_0)}{\nu^n(h_0)}$$

Comme $\hat{\mathcal{H}} \subset \hat{\mathcal{A}}$ on sait que la suite de marginales η_1^n sur \mathcal{H} , qui est un sous-groupe de \mathbb{R} , converge vaguement vers η_1 et qu'elle est tendue. Comme \mathcal{K} est compact, cela entraîne que la suite η^n est également tendue et donc relativement compacte en $\mathcal{M}_+(\mathcal{A})$. Comme une mesure sur \mathcal{A} est déterminée par les valeurs qu'elle prend sur les caractères (cf. [Rud62, page 29]), la suite η^n admet un seul point d'adhérence et donc converge vers η . Enfin si $f \in C_c(\mathcal{A})$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu^n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu^n(\frac{f}{h_0} h_0)}{\nu^n(h_0)} \nu^n(h_0) = \nu(f)$$

□

Un théorème limite local. La proposition suivante, qui nous découle directement des résultats qu'on vient de voir, permet d'étendre le théorème local sur \mathbb{R} au produit direct de \mathbb{R} avec un groupe compact.³

PROPOSITION 4.3.4. *Soit μ une mesure de probabilité de \mathcal{A} , apériodique et telle que sa marginale μ_1 sur \mathcal{H} est de moyenne nulle et admet un moment d'ordre 2, σ^2 , alors pour toute fonction $f \in C_c(\mathcal{A})$:*

$$(4.3.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mu^{(n)}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathcal{A}} f(a) da$$

DÉMONSTRATION. On sait (cf. [Bre68, page 218]) qu'il existe une fonction strictement positive $h_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \cap L^1(\mathcal{H})$ telle que \hat{h}_0 soit à support compact. Grâce au lemme précédent il suffit de montrer que pour tout $\gamma \in \hat{\mathcal{A}}$ on a la convergence (4.3.6) pour $f = \gamma h_0$. On voit facilement que puisque $h_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \cap L^1(\mathcal{A})$ alors pour tout $\gamma \in \hat{\mathcal{A}}$ on a $\gamma h_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \cap L^1(\mathcal{A})$. On observe que si $\theta \in \hat{\mathcal{H}}$ et $\chi \in \hat{\mathcal{K}}$

³Voir aussi les résultats de [BBC78, Gui84] pour $\mathbb{R}^d \rtimes \mathcal{K}$.

sont tels que $\gamma = \chi\theta$, alors $\widehat{\chi\theta h_0} = \widehat{\chi}\widehat{\theta h_0}$ et donc elle est à support compact puisque $\widehat{\theta h_0}$ est à support compact et puisque la transformée de Fourier de χ est 1_χ . En appliquant, alors, le Lemme 4.3.2 et le théorème limite local classique on voit immédiatement que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mu^{(n)}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mu_1^{(n)}(f_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathcal{H}} \int_{\mathcal{K}} f(h, k) dk dh$$

□

Limite locale lorsque la partie réelle est conditionnée à rester négative. On veut maintenant déterminer le comportement de la loi de la marche aléatoire au moment n lorsque sa composante réelle est conditionnée à rester négative et pour faire cela on doit généraliser sur \mathcal{A} quelques propriétés du noyau potentiel connue sur \mathbb{R} .

Si f est une fonction mesurable et t un nombre réel la fonction génératrice du potentiel sera, lorsqu'elle est définie :

$$U(f, z) = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} z^k f(R_k) \right]$$

Pour tout temps d'arrêt l on pose :

$$U_l(f, z) = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{l-1} z^k f(R_k) \right]$$

On a alors le lemme suivant

LEMME 4.3.5. Soit χ un homomorphisme de $\mathcal{A} = \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ dans (\mathbb{C}^*, \cdot) alors

(1) Si $|w| < |\mu(\chi)|$

$$U(\chi, w) = \frac{1}{1 - w\mu(\chi)}$$

(2) Si $|w| < |\mu(\chi)|$

$$U_l(\chi, w) = (1 - \mathbb{E}[w^l \chi(R_l)]) U(\chi, w)$$

(3) Soit $l = \min\{n : S_n > 0\}$ et $\chi(h, k) = z^h \gamma(h, k)$ pour $z \in \mathbb{C}^*$ et pour $\gamma \in \hat{\mathcal{A}}$ alors, pour tout w tel que $|w| < 1$:
si $|z| \leq 1$

$$1 - \mathbb{E}[w^l \chi(R_l)] = \exp \left(- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k} \mathbb{E}[S_k > 0, \chi(R_k)] \right)$$

et si $|z| \geq 1$

$$(4.3.7) \quad U_l(\chi, w) = \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k} \mathbb{E}[S_k \leq 0, \chi(R_k)] \right)$$

DÉMONSTRATION. La démonstration suit le schéma de son analogue sur \mathbb{R} comme elle est présentée dans le livre de Spitzer [Spi64, page 181]

1. Il suffit d'observer que :

$$\mathbb{E}[\chi(a_1 \cdots a_k)] = \mathbb{E}[\chi(a_1)] \cdots \mathbb{E}[\chi(a_k)] = (\mu(\chi))^k$$

2. En utilisant la propriété de Markov, on montre que :

$$\begin{aligned} U(\chi, w) &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{l-1} w^k f(R_k) \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{k=l}^{\infty} w^k \chi(R_k) \right] \\ &= U_l(\chi, w) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} [w^{l+k} \chi(R_l R_l^{-1} R_{l+k})] \\ &= U_l(\chi, w) + \sum_{k=0}^{\infty} w^k \mathbb{E} [w^l \chi(R_l)] \mathbb{E} [\chi(R_k)] \\ &= U_l(\chi, w) + \mathbb{E} [w^l \chi(R_l)] U(\chi, w) \end{aligned}$$

3. Pour tout $|w| \leq |\mu(\chi)|^{-1}$

$$\begin{aligned} 1 - w\mu(\chi) &= e^{\log(1-w\mu(\chi))} = e^{-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k} \mu(\chi)^k} \\ &= e^{-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k} \mathbb{E}[S_k \leq 0, \chi(R_k)]} e^{-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k} \mathbb{E}[S_k > 0, \chi(R_k)]} \end{aligned}$$

Donc en utilisant 1. et 2. et si $\chi(h, k) = z^h \gamma(h, k)$ on a :

$$\begin{aligned} f_{w,\gamma}(z) &= (1 - \mathbb{E} [w^l z^{S_l} \gamma(R_l)]) e^{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k} \mathbb{E}[S_k > 0, z^{S_k} \gamma(R_k)]} \\ &= U_l(\chi, w) e^{-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k} \mathbb{E}[S_k \leq 0, z^{S_k} \gamma(R_k)]} = g_{w,\gamma}(z) \end{aligned}$$

Cette équation est vraie en particulier pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ si $|w| < 1$ et $\gamma \in \hat{\mathcal{A}}$. Dans ce cas de plus la fonction $f_{w,\gamma}$ est bien définie et bornée sur $\{|z| \leq 1\}$ et holomorphe sur l'intérieur du disque ; par contre $g_{w,\gamma}$ est définie et bornée sur $\{|z| \geq 1\}$ et holomorphe dans l'intérieur de la couronne. La théorie des fonctions holomorphes nous permet alors de conclure que $f_{w,\gamma}$ peut être prolongée par $g_{w,\gamma}$ à \mathbb{C} tout entier et que les deux fonction sont constantes sur \mathbb{C} ; donc, comme, $f_{w,\gamma}(0) = 1$, on a $f_{w,\gamma} = g_{w,\gamma} = 1$. L'énoncé de 3. suit alors immédiatement des définitions de $f_{w,\gamma}$ et $g_{w,\gamma}$. \square

PROPOSITION 4.3.6. *Soit μ une mesure de probabilité sur \mathcal{A} apériodique et telle que sa marginale μ_1 sur \mathcal{H} est de moyenne nulle et admet un moment d'ordre 2, σ^2 .*

Alors, si $l = \min\{n : S_n > 0\}$ pour toute fonction $f \in C_c(\mathcal{A})$:

$$(4.3.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \mathbb{E} [[l > n] f(R_n)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathcal{A}} f(a) U_l * \lambda_-(da)$$

où U_l est la mesure définie par :

$$U_l(f) = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{l-1} f(R_k) \right]$$

$$\text{et } \lambda_-(f) = \int_{\mathcal{H} \times \mathcal{K}} 1_{[-\infty, 0]}(h) f(h, k) dh dk$$

DÉMONSTRATION. On esquisse ici la démonstration qui suit le schéma de la démonstration dans le cas réel trouvée par Iglehart en [Igl74] et reprise par Le Page et Peigné en [LPP97]. Dans ce dernier article on peut trouver le lemme technique suivant :

LEMME 4.3.7. *Soit $(c_n)_n$ et $(d_n)_n$ deux suites de nombres réels positifs tels que :*

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} c_n = c > 0$$

$$(ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} d_n = d < \infty$$

(iii) *la suite $(nd_n)_n$ est bornée.*

Si $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-k} d_k$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = cd$

Fixons un nombre réel $0 < a < 1$ on peut voir, par exemple en [LPP97] que $h(x) = e^{ax}$ est $U_l * \lambda_-$ intégrable ; il suffit donc de démontrer la convergence (4.3.8) pour des fonctions du type $\chi = \gamma h$ avec $\gamma \in \hat{\mathcal{A}}$ et appliquer le lemme 4.3.3.

En dérivant les deux cotés de l'égalité (4.3.7) par rapport à w on obtient que pour $|w| < 1$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} k w^{k-1} \mathbb{E}[l > k] \chi(R_k) = \\ & = \left(\sum_{k=1}^{\infty} w^{k-1} \mathbb{E}[S_k \leq 0] \chi(R_k) \right) U_l(\chi, w) \\ & = \left(\sum_{k=1}^{\infty} w^{k-1} \mathbb{E}[S_k \leq 0] \chi(R_k) \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} w^{k-1} \mathbb{E}[l > k-1] \chi(R_{k-1}) \right) \end{aligned}$$

Donc en particulier :

$$n \mathbb{E}[l > n] \chi(R_n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[S_{n-k} \leq 0] \chi(R_{n-k}) \mathbb{E}[l > k] \chi(R_k)$$

Puisque $|\mathbb{E}[l > n] \chi(R_n)|$ est plus petit de $\mathbb{E}[l > n] h(S_n)$ et elle est donc majorée par une suite de l'ordre $n^{-\frac{3}{2}}$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[l > n] \chi(R_n)$ converge et la suite $\{n \mathbb{E}[l > n] \chi(R_n)\}_n$ est bornée. De plus on a vu (Proposition 4.3.4) on a que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \mathbb{E}[S_n \leq 0] \chi(R_n) = (\sqrt{2\pi\sigma^2})^{-1} \lambda_-(\chi)$$

on peut appliquer le lemme 4.3.7 avec

$$c_n = \mathbb{E}[[S_n \leq 0]\chi(R_n)], \quad d_n = \mathbb{E}[[l > n]\chi(R_n)], \quad a_n = n\mathbb{E}[[l > n]\chi(R_n)]$$

et on trouve :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \mathbb{E}[[l > n]\chi(R_n)] = (\sqrt{2\pi\sigma^2})^{-1} U_l(\chi) \lambda_-(\chi)$$

On peut conclure la démonstration en observant que comme χ est un homomorphisme $U_T(\chi) \lambda_-(\chi) = U_T * \lambda_-(\chi)$. \square

Limite locale pour la loi conjointe de R_n et du maximum. On conclut avec le résultat qui nous intéresse, c'est-à-dire un théorème limite pour la loi conjointe de R_n et du maximum

$$M_n = \max\{S_k : 0 \leq k \leq n\}.$$

PROPOSITION 4.3.8. *Soit μ une mesure de probabilité sur \mathcal{A} apériodique et telle que sa marginale μ_1 sur \mathcal{H} est de moyenne nulle et admet un moment d'ordre 2. Alors il existe une mesure η_3 , sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathcal{A}$ telle que pour toute fonction exponentielle du type $f_1(x, y) = e^{-ax-by}$ avec $a, b > 0$ et pour toute fonction $f_2 \in C_C(\mathcal{A})$*

$$(4.3.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \mathbb{E}[f_1(M_n, M_n - S_n) f_2(a(R_n))] = \eta_3(f_1 \times f_2) < +\infty$$

DÉMONSTRATION. Grâce au Lemme 4.3.3, on peut choisir $f_2 = \gamma \in \hat{\mathcal{A}}$. On observe que si $t_n = \inf\{k \geq 0 : S_k = M_n\}$ avec une factorisation du type de Spitzer-Grincevicius on a

$$\mathbb{E}[e^{-aM_n - b(M_n - S_n)} \gamma(R_n)] = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[[t_n = k] e^{-aM_n - b(M_n - S_n)} \gamma(R_n)]$$

Avec les notations des sections précédentes

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[[t_n = k] e^{-aM_n - b(M_n - S_n)} \gamma(R_n)] \\ &= \mathbb{E}[[t_n = k] e^{-aS_k - b(S_k - S_n)} \gamma(R_k R_n^{k+1})] \\ &= \mathbb{E}[[t_n = k] e^{-aS_k} e^{bS_n^{k+1}} \gamma(R_k) \gamma(R_n^{k+1})] \\ &= \mathbb{E}[[\bar{l}(-h_k, \dots) > k] e^{-aS_k} \gamma(R_k)] \mathbb{E}[[l(h_{k+1}, \dots) > n - k] e^{bS_n^{k+1}} \gamma(R_n^{k+1})] \\ &= \alpha_k \beta_{n-k} \end{aligned}$$

Puisque par la proposition précédente (ou bien pour son analogue avec \bar{l} à la place de l) les suites $\left\{n^{\frac{3}{2}} \alpha_n\right\}_n$ et $\left\{n^{\frac{3}{2}} \beta_n\right\}_n$ convergent, on peut appliquer le Lemme 4.1.2 et conclure que la limite (4.3.9) existe. \square

Deuxième partie

Marches aléatoires sur le groupe affine réel et ses extensions multidimensionnelles

How a centered random walk on the affine group goes to infinity

ABSTRACT. We consider the processes obtained by (left and right) products of random i.i.d. affine transformations of the Euclidean space \mathbb{R}^d . Our main goal is to describe the geometrical behavior at infinity of the trajectories of these processes in the most critical case when the dilatation of the random affinities is centered. Then we derive a proof of the uniqueness of the invariant Radon measure for the Markov chain induced on \mathbb{R}^d by the left random walk and prove a stronger property of divergence for the process on induced by the right random walk.

We consider the group $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ of affine transformations of the space \mathbb{R}^d :

$$(a, b) : x \mapsto ax + b$$

where a is a positive real number and b a vector of \mathbb{R}^d . Let $\{(A_n, B_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of random independent and identically distributed affine transformations. We are interested in the behavior of their composition products, that is in the behavior of the right and left random walks on $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$:

$$R_n = (A_1, B_1) \cdots (A_n, B_n) \text{ and } L_n = (A_n, B_n) \cdots (A_1, B_1).$$

We will identify the group $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ with the half-space $\mathbb{H} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. General results on random walks ensure that random walks on the affine group are transient, so that accumulation points of the trajectories are on the boundary $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ of the geometrical compactification of \mathbb{H} . In particular, it is known and easy to show that if the mean of the logarithm of the component on \mathbb{R}_+^* is positive, then the random walks converge to ∞ , while, if this mean is negative, the right random walk converges to a random element of the boundary different from ∞ . Although random walks on this group are well studied (e.g. Kesten [Kes73], Grincevicius [Gri74], Élie [Éli82], Le Page and Peigné [LPP97] Goldie and Maller [GM00]), it was not yet known what happens in the so-called “critical case” where the projective We will prove, under a

moment hypothesis, but without supposing that the step distribution has a spread out, that a centered right random walk converges to the boundary. The argument is inspired by an analogous result on the affine group of \mathbb{R} obtained by D.I.Cartwright, V.A.Kaimanovich and W.Woess [CKW94]. We will then apply this result to the study of the Markov chain induced by the random walk on \mathbb{R}^d , that is the process defined recursively using a sequence

of i.i.d. random variables $\{(A_n, B_n)\}_n$ as :

$$Y_{n+1}^y = A_{n+1}Y_n^y + B_{n+1} \quad Y_0^y = y$$

Besides its intrinsic interest, this process, also known as first order random coefficient autoregressive model, has various applications (especially in economy and biology, see for instance Engle and Bollerslev[EB86], Nicholls and Quinn[NQ82], Goldie[Go191]). M.Babillot, Ph.Bougerol and L.Elle have already shown in [BBE97] that even when the coefficients A_n are centered, that is $\mathbb{E}[\log(A_n)] = 0$, the trajectories of this process satisfy a property that may be seen as a global stability at finite distance or as a local contraction, that is :

$$|Y_n^x - Y_n^y| 1_K(Y_n^x) \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow +\infty$$

almost surely for all compact set K of \mathbb{R}^d . As they had noticed, this property is related to the uniqueness of an invariant Radon measure. We will show that the local contraction property is a straightforward geometrical consequence of the convergence of the right random walk to ∞ , and we will give a proof of the uniqueness of the Radon invariant measure for the chain $\{Y_n\}_n$ via the Chacon-Ornstein theorem, thus correcting an error in [BBE97].

In the last section we will look at the projection of the right random walk on \mathbb{R}^d , that is the series :

$$(5.0.10) \quad Z_n^g = b(g) + a(g) \sum_{k=1}^n A_1 \cdots A_{k-1} B_k$$

Using a stronger moment hypothesis and a density condition for the marginal on \mathbb{R}^d , we will prove that Z_n^g is transient, in the sense that almost surely $\lim_n |Z_n^g| = +\infty$. Although Z_n^g is not Markov, it is of some interest for various problems. For instance if we consider the continuous time process $\tilde{Z}_t = \int_0^t e^{W_s} dB_s$, where W_t and B_t are two independent Brownian motions, and we look at it at integer times we obtain a series of the type (5.0.10). \tilde{Z} is a well known economic model (cf. for instance [Ver79] and [Yor97]) and it is easy to show that $\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \tilde{Z}_t = -\infty$ and $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \tilde{Z}_t = +\infty$ so that, being continuous, \tilde{Z} has to visit infinitely often every open set of \mathbb{R} . The result of the last section implies that every discretization of time leads to a transient process and shows therefore that the recurrence of this model is not very robust.

We can remark that the results of section 2 and section 3 are still valid, and can be proved exactly with the same techniques, for a random walk on the group of affine conformal transformations, that is when the variables A_n are not real positive numbers but, more generally, matrices that live in a group that is direct product of compact subgroup of $GL(\mathbb{R}^d)$.

I would like to thank Martine Babillot for her continuous support and her contagious enthusiasm.

5.1. Notations and hypotheses

We will denote by $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ the group of affine transformations of the Euclidean space \mathbb{R}^d , that is transformations of the form $x \mapsto ax + b$ with a a positive number and b a vector in \mathbb{R}^d ; thus $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ may be identified with the hyperbolic half-space $\mathbb{H} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. We will denote by a and b the projections of $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ on \mathbb{R}^*

ely, so that $g = (a(g), b(g))$ for each $g \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$.

here at infinity leads to the geometrical compactification of \mathbb{H} , the boundary of \mathbb{H} is $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$. The group of hyperbolic isometries at point ∞ is nothing but the group of affine conformal transformations. It contains $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ as a subgroup. The action of $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ on $\partial\mathbb{H} - \{\infty\}$ is a natural action on \mathbb{R}^d and will be denoted by :

$$g \cdot x = a(g)x + b(g)$$

we use the fact that the action and the projection on \mathbb{R}^d coincide, that is $g \cdot x = b(g(a, x))$ for every $a \in \mathbb{R}_+^*$.

In the composition of two affinities we have the identity :

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1).$$

From an algebraic point of view, $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ is a semi-direct product of \mathbb{R}_+^*

and a sequence $X_n = (A_n, B_n)$ of random variables from a probability distribution on $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$, that we suppose independent and identically distributed with law μ . The right and left random walks of law μ are the Markov chains (R_n) and (L_n) defined respectively by :

$$R_{n+1} = R_n X_{n+1} \quad R_0 = \text{Id}$$

$$L_{n+1} = X_{n+1} L_n \quad L_0 = \text{Id}$$

R_n and L_n are both distributed as $\mu^{(n)}$, the n^{th} convolution power of μ . The expected number of visits of these random walks in a Borel set $B \subset \mathbb{H}$

$$U(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[R_n \in B] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[L_n \in B]$$

is given by the potential measure $U = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^{(n)}$. The potential kernels of the random walk give the expected numbers of visits when the random walk starts at a generic point $g \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$, and are respectively given by $U^r(B)$ and $U^l(B) = U * \delta_g(B)$.

It is clear that

$$a(R_n) = a(L_n) = A_1 \cdots A_n$$

and the multiplicative random walk on \mathbb{R}^*

We will suppose that the random walk is non degenerate in the sense that there exists no $y \in \mathbb{R}^d$ fixed by X_1 and that we are really dealing with affinities and not just with translations, i.e.

$$(H1) \quad \forall y \in \mathbb{R}^d : \mathbb{P}[X_1 \cdot y = y] < 1 \text{ and } \mathbb{P}[a(X_1) = 1] < 1$$

Under this hypothesis the closed group generated by the support of μ is non-unimodular, thus the random walks are transient and the expected number of visits, $U(K)$, in every compact set K is finite (cf. [GKR77]).

We will not need, at least in the first part, any density hypothesis but only a weak moment condition that is

$$(H2) \quad \mathbb{E}[|\log(a(X_1))|] < +\infty \text{ and } \mathbb{E}[\log^+ |b(X_1)|] < +\infty$$

As announced, we will only consider the most critical case for which the random walk projects on \mathbb{R}^d

$$(H3) \quad \mathbb{E}[\log(a(X_1))] = 0.$$

5.2. Convergence to infinity

In this section we shall prove :

THEOREM 5.2.1. *Under the hypothesis (H1), (H2) and (H3), almost surely for all $g \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} gR_n = \infty$$

in the topology of the compactification $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$.

To prove that gR_n converges to ∞ is equivalent to show that the sequence gR_n is definitely in every neighborhood of ∞ , or equivalently that every set of the form $C_{s,t} = \{g \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d) : a(g) < s \text{ and } |b(g)| < t\}$, with s and t real positive number, is transient. On the other hand we will see that the left random walk visits this set infinitely often, so that the potential measure of $C_{s,t}$ is infinite. The transience of the set $C_{s,t}$ for the right random walk is thus a quite subtle phenomenon, and instead to prove it directly we will show, following the ideas of [CKW94], that the right random walk can cross the border between $C_{s,t}$ and its complement only a finite numbers of times.

PROPOSITION 5.2.1. *Suppose that the hypotheses (H1) and (H2) are verified. Then if $C = \{g \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d) : a(g) < 1 \text{ and } |b(g)| < 1\}$*

$$(5.2.1) \quad \mathbb{P}[gR_{n+1} \in C, gR_n \notin C \text{ infinitely often}] = 0$$

for almost all $g \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ with respect to the Haar measure.

This proposition cannot be proven as in [CKW94] because in our case the group does not acts on a discrete space, such as the tree. So we have to find a different way and we will need the following lemma that estimates the potential of integrable functions on a locally compact group.

LEMMA 5.2.2. *Let U^r be the potential kernel of a transient right random walk on a locally compact second countable group G and dg the right Haar measure of G . Then for every positive function $f \in L^1(dg)$, $U^r f(g)$ is dg -almost surely finite.*

PROOF. We will show that $U^r f$ is locally dg -integrable and thus necessarily dg -almost surely finite. If μ is the distribution of the random walk, we recall that potential measure is $U = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^{(n)}$. Let K be a compact set of G . Then by the right invariance of dg :

$$\begin{aligned} \int_G U^r f(g_1) 1_K(g_1) dg_1 &= \int_G \int_G f(g_1 g_2) 1_K(g_1) U(dg_2) dg_1 \\ &= \int_G \int_G f(g_1) 1_K(g_1 g_2^{-1}) dg_1 U(dg_2) \\ &= \int_G f(g_1) \check{U}^r 1_K(g_1) dg_1 \\ &\leq \sup_{g \in G} \check{U}^r 1_K(g) \int_G f(g_1) dg_1 \end{aligned}$$

where \check{U}^r is the potential kernel of the right random walk whose law $\check{\mu}$ is the image of μ under the map $g \mapsto g^{-1}$. The transience of the random walk of law $\check{\mu}$ follows from the transience of random walk of law μ by duality. Therefore $\check{U}^r 1_K(g)$ is finite and thus uniformly bounded by the maximum principle (cf. **[Rev75]**). Since f is integrable $\int_G U^r f(g_1) 1_K(g_1) dg_1$ has to be finite.

□

PROOF. of proposition 5.2.1. By the Borel-Cantelli lemma, in order to prove (5.2.1), it is sufficient to show that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[gR_{n+1} \in C, gR_n \notin C] < +\infty.$$

On the other hand we can write

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[gR_{n+1} \in C, gR_n \notin C] &= \mathbb{E}[\mathbb{P}[gR_n X_{n+1} \in C \mid R_n] 1_{C^c}(gR_n)] \\ &= \mathbb{E}[\phi(gR_n)] \end{aligned}$$

where

$$\phi(g) = \mathbb{P}[gX_1 \in C] 1_{C^c}(g)$$

and therefore

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[gR_{n+1} \in C, gR_n \notin C] = U^r \phi(g).$$

So, if $U^r \phi$ is almost everywhere finite, (5.2.1) will hold for almost all g . Using the previous lemma, we just need to show that ϕ is integrable with respect to the right Haar measure $dg = \frac{da db}{a}$ of $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$. As

$$C^c = \{g \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d) : a(g) \geq 1\} \cup \{g \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d) : a(g) < 1, |b(g)| \geq 1\}$$

we can split the integral of $\int_{\text{Aff}(\mathbb{R}^d)} \phi(g) dg$ into two parts. On the first set we have :

$$\begin{aligned} \iint \phi(a, b) 1_{[a \geq 1]} \frac{db da}{a} &= \mathbb{E} \left[\int_1^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} 1_C((a, b)(A_1, B_1)) \frac{db da}{a} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_1^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{[aA_1 < 1]} 1_{[|aB_1 + b| < 1]} \frac{db da}{a} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[v_d \log \left(\frac{1}{A_1} \vee 1 \right) \right] = v_d \mathbb{E} [\log^-(A_1)] \end{aligned}$$

where v_d is the volume of the disc of radius 1 in \mathbb{R}^d . On the second set we have that :

$$\iint \phi(a, b) 1_{[a < 1, |b| \geq 1]} \frac{db da}{a} \leq \mathbb{E} \left[\int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} 1_{[|b| \geq 1]} 1_{[|aB_1 + b| < 1]} db \right) \frac{da}{a} \right]$$

As the Lebesgue measure of the intersection of the complement of the unitary disc of center the origin and of the unitary disc of center aB_1 is bounded by the volume of the unitary disc and goes to zero as $|aB_1|$, it is possible to find a constant c_d depending only on the dimension d such that

$$\begin{aligned} \iint \phi(a, b) 1_{[a < 1, |b| \geq 1]} \frac{db da}{a} &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^1 (v_d \wedge c_d |aB_1|) \frac{da}{a} \right] \\ &\leq c \mathbb{E} [\log^+(|B_1|)] \end{aligned}$$

where c is a suitable constant.

□

We are now able to prove theorem 5.2.1

PROOF. of theorem 5.2.1. A direct consequence of proposition 5.2.1 is that, for almost all $g \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$, gR_n is either definitely in C or definitely in C^c . As we assumed that $\mathbb{E}[\log(a(X_1))] = 0$, $\log(a(gR_n))$ is a recurrent random walk on the real line; hence gR_n visits the set $[1, +\infty] \times \mathbb{R} \subset C^c$ infinitely often. Therefore we can conclude that for almost all g , almost surely, gR_n is definitely in C^c , or equivalently that for almost all g , R_n is definitely in gC^c .

Combining the fact that $\{gC^c\}_{g \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d)}$ is a family of open neighborhoods of ∞ and the fact that for every fixed g_0 the set of g such that $gC^c \subset g_0C^c$ has positive Haar measure, it is possible to choose a sequence g_k such that almost surely R_n is definitely in every g_kC^c and such that $\{g_kC^c\}_n$ remain a family of open neighborhoods of ∞ . Hence almost surely $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$

To conclude that almost surely for every g in $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$, gR_n converges to ∞ we only need to notice that the action of g on $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ is continuous, so that $\lim_{n \rightarrow \infty} gR_n = g \cdot \infty = \infty$.
 \square

5.3. Local contraction

Let y_0 be a random vector independent of the $\{X_i\}_i$. The left random walk induces a Markov chain on \mathbb{R}^d :

$$Y_n^{y_0} = L_n \cdot y_0$$

for every $n \geq 0$. Since $Y_n = X_n \cdot Y_{n-1}$, this process satisfies to the random difference equation

$$Y_n = a(X_n)Y_{n-1} + b(X_n).$$

From the geometrical viewpoint that we have adopted, this process may be seen as the projection on \mathbb{R}^d of the left random walk starting from a point whose \mathbb{R}^d component is y_0 , that is

$$Y_n^{y_0} = L_n \cdot y_0 = b(L_n(a, y_0))$$

for every a in \mathbb{R}^* .

A consequence of the previous theorem concerns the dependence on the starting point of the process Y_n^y . Let us consider the distance $|Y_n^x - Y_n^y| = a(L_n) |x - y|$ between two trajectories starting from two different point x and y of \mathbb{R}^d ; since we assumed that $\mathbb{E}[\log(A_1)] = 0$, we have that

$$\overline{\lim} |Y_n^x - Y_n^y| = +\infty \text{ while } \underline{\lim} |Y_n^x - Y_n^y| = 0.$$

Thus it is not possible to globally control this distance. However M.Babillot, Ph.Bougerol and L.Elle have noticed that if we look at the Markov chain only at the times it visits a compact set K , Y_n becomes a contractive process, in the sense that almost surely for every x and y :

$$\lim_{n \rightarrow 0} |Y_n^x - Y_n^y| 1_K(Y_n^y) = 0.$$

This property was obtained in [BBE97] using an asymptotic estimate of the potential. The proof we propose here is more geometrical and relies on the convergence of the right random walk to ∞ .

THEOREM 5.3.1. *Under the hypotheses H1-3, almost surely for every compact set $K \subset \mathbb{R}$ and every $x, y \in \mathbb{R}$*

$$(5.3.1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |L_n \cdot x - L_n \cdot y| 1_K(L_n \cdot y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a(L_n) 1_K(L_n \cdot y) = 0$$

PROOF. We first observe that

$$L_n = (X_1^{-1} \cdots X_n^{-1})^{-1} = \check{R}_n^{-1}$$

where \check{R}_n is the right random walk of law $\check{\mu}$, obtained from μ by composing with the inversion on the group; therefore, as $(a, b)^{-1} = (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$, we have

$$(5.3.2) \quad b(L_n) = -\frac{b(\check{R}_n)}{a(\check{R}_n)} = -a(L_n)b(\check{R}_n)$$

Let k be a real positive number such that K is contained in the disc centered at the origin and of radius k ; then $L_n \cdot y = a(L_n)y + b(L_n) \in K$ implies that $|b(L_n)| \leq k + a(L_n)|y|$. Using the equality (5.3.2) we have $|b(\check{R}_n)| \leq \frac{k}{a(L_n)} + |y|$ so that :

$$L_n \cdot y \in K \Rightarrow \max\{a(\check{R}_n), b(\check{R}_n)\} \leq (k \vee 1) \frac{1}{a(L_n)} + |y|$$

As the right random walk \check{R}_n satisfy the hypotheses of theorem 5.2.1, we have that $\max\{a(\check{R}_n), b(\check{R}_n)\}$ converges to $+\infty$ and we conclude.

□

Let us consider the attractor set $A(\omega, y) \subset \mathbb{R}^d$ of each trajectory, that is the set of accumulation point of $\{L_n(\omega) \cdot y\}_n$. It is known that if we add to the hypothesis H1-3 a little stronger moment condition, that is :

$$(H4) \quad \mathbb{E}[|\log(a(X_1))|^2] < +\infty \text{ and } \mathbb{E}[(\log^+ |b(X_1)|)^{2+\eta}] < +\infty$$

for some $\eta > 0$ the Markov chain $L_n \cdot y$ is recurrent in the sense that the attractor sets $A(\omega, y)$ are almost surely not empty. A direct consequence of the local contraction property is that the set $A(\omega, y)$ does not depend on y , and then on ω by the 0-1 law; thus there exists a set $A \subseteq \mathbb{R}^d$ such that $A = A(\omega, y)$ $\mathbb{P}(d\omega)$ -almost surely for all $y \in \mathbb{R}^d$.

Although in the centered case, $L_n \cdot y$ is not positive recurrent and has not an invariant probability measure, M. Babilot, Ph. Bougerol and L.Elle have constructed in [BBE97] an invariant Radon measure for this process. We will see in the next theorem that the invariant Radon measure is unique and therefore that its support is A .

THEOREM 5.3.2. *Under the hypothesis H1-4, the Markov chain $L_n \cdot y$ has a unique Radon invariant measure on \mathbb{R}^d up to a multiplicative constant.*

Furthermore for every couple f and g of continuous functions with compact support such that g is positive and not identically zero on A , the limit of $\frac{\sum_{k=0}^n f(L_k \cdot y)}{\sum_{k=0}^n g(L_k \cdot y)}$ is almost surely constant and does not depend on y .

PROOF. We will see that it follows from the local contraction property (5.3.1) that if f and g are continuous functions with compact support and g is positive and not identically zero on A , there exists a constant $c_{f,g}$ such that almost surely for every y :

$$(5.3.3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n f(L_k \cdot y)}{\sum_{k=0}^n g(L_k \cdot y)} = c_{f,g}$$

On the other hand if we consider an invariant Radon measure m on \mathbb{R}^d , the measure \mathbb{P}_m on the space $(\mathbb{R}^d)^\mathbb{N}$ of trajectories of the Markov chain Y_n^y , obtained as the image of the measure $m \times \mathbb{P}$ on $\mathbb{R}^d \times (\text{Aff}(\mathbb{R}^d))^\mathbb{N}$ by the mapping $(y_0, (x_1, x_2, \dots)) \mapsto (y_0, x_1 \cdot y_0, x_2 x_1 \cdot y_0, \dots)$, is invariant by the shift θ on $(\mathbb{R}^d)^\mathbb{N}$. So that the linear transformation induced by the shift on $L^1(\mathbb{P}_m)$ is a positive contraction. Moreover the recurrence and the local contraction imply that this linear transformation is also conservative. Indeed, if we consider the positive integrable function 1_D , where D is an open and relatively compact set such that $A \cap D \neq \emptyset$, we have that \mathbb{P}_m -almost surely :

$$\left\{ \mathbf{y} \in (\mathbb{R}^d)^\mathbb{N} : \sum_{k=0}^{\infty} 1_D(\theta^k \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} 1_D(y_k) = +\infty \right\} = (\mathbb{R}^d)^\mathbb{N}.$$

We can then apply the Chacon-Ornstein theorem and we have that for every positive function f and g in $L^1(m)$ on the set $\{(y, \omega) \mid \sum_{k=0}^n g(L_k(\omega) \cdot y) > 0\}$:

$$(5.3.4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n f(L_k \cdot y)}{\sum_{k=0}^n g(L_k \cdot y)} = \frac{\mathbb{E}_m[f(Y_0)|\mathcal{I}]}{\mathbb{E}_m[g(Y_0)|\mathcal{I}]} \quad dm(y) \times \mathbb{P} - \text{almost surely}$$

where \mathcal{I} is the σ -algebra of invariant set for the shift on $(\mathbb{R}^d)^\mathbb{N}$.

Because of (5.3.3) we have then :

$$\frac{\mathbb{E}_m[f(Y_0)|\mathcal{I}]}{\mathbb{E}_m[g(Y_0)|\mathcal{I}]} = c_{f,g} \quad dm(y) \times \mathbb{P} - \text{almost surely}$$

and this implies that for every invariant measure m we have :

$$m(f) = \mathbb{E}_m[\mathbb{E}_m[f(Y_0)|\mathcal{I}]] = \mathbb{E}[c_{f,g} \mathbb{E}[g(Y_0)|\mathcal{I}]] = c_{f,g} m(g)$$

So m is unique up to a constant.

We will start to prove that the ratio limit in (5.3.3) does not depend on the starting point. We will denote $\sum_{k=0}^n f(L_k \cdot y)$ by $S_n f(y)$.

Let f and g two continuous functions with compact support, such that g is positive and not identically zero on A , and let K be a compact set which contains their support. For every $\delta > 0$, let $K_\delta = \{z \in \mathbb{R}^d \mid \text{dist}(z, K) \leq \delta\}$. Since f is uniformly continuous, using (5.3.1), almost surely for every y and x in \mathbb{R}^d and for every positive number ϵ there exists a $N \in \mathbb{N}$ such that if $k \geq N$:

$$|f(L_k \cdot y) - f(L_k \cdot x)| \leq \epsilon \max\{1_K(L_k \cdot y), 1_K(L_k \cdot x)\} \leq \epsilon 1_{K_\delta}(L_k \cdot y)$$

As g is a positive function and not identically zero on A , then is possible, using (5.3.4), to chose y such that \mathbb{P} -almost surely $\frac{S_n 1_{K_\delta}(y)}{S_n g(y)}$, converges. So that :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{S_n f(y) - S_n f(x)}{S_n g(y)} \right| \leq \epsilon \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n 1_{K_\delta}(y)}{S_n g(y)}$$

because $\lim S_n g(y) = +\infty$. As ϵ was arbitrary chosen, we have that almost surely, for all x , $\lim \left| \frac{S_n f(y) - S_n f(x)}{S_n g(y)} \right| = 0$.

If the support of g contains the support of f (which is not a restrictive hypothesis), we have :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{S_n f(y)}{S_n g(y)} - \frac{S_n f(x)}{S_n g(x)} \right| \leq \\ & \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{S_n f(y) - S_n f(x)}{S_n g(y)} \right| + \frac{S_n f(x)}{S_n g(x)} \left| \frac{S_n g(y) - S_n g(x)}{S_n g(y)} \right| = 0 \end{aligned}$$

because $\frac{S_n f(x)}{S_n g(x)}$ is bounded. So if we had chosen y such that $\frac{S_n f(y)}{S_n g(y)}$ converges to a random variable $c_{f,g}$ then almost surely, for every x ,

$$(5.3.5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n f(x)}{S_n g(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n f(y)}{S_n g(y)} = c_{f,g}$$

The fact that the limit $c_{f,g}$ is constant is due to the 0-1 law. In fact for every $h \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=h}^n f(X_k \cdots X_{h+1} \cdot y)}{\sum_{k=h}^n g(X_k \cdots X_{h+1} \cdot y)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=h}^n f(L_k L_h^{-1} \cdot y)}{\sum_{k=h}^n g(L_k L_h^{-1} \cdot y)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n f(L_h^{-1} \cdot y)}{S_n g(L_h^{-1} \cdot y)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n f(y)}{S_n g(y)} = c_{f,g} \end{aligned}$$

because $S_n g(L_h^{-1} \cdot y)$ converges to $+\infty$ and because of (5.3.5), so that $c_{f,g}$ is measurable with respect to the σ -algebra of the $\{X_k\}_{k>h}$, for each $h \in \mathbb{N}$.

□

5.4. Divergence of the right projection

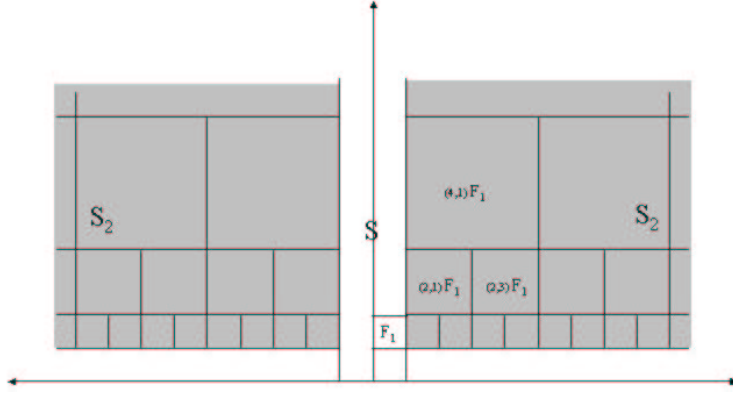
In this section we will reinforce the result of theorem 5.2.1 by showing that, under some density hypothesis, not only the right random walk goes to infinity but its projection on \mathbb{R}^d do the same, in other words the process

$$Z_n^g = b(gR_n) = b(g) + a(g) \sum_{k=1}^n A_1 \cdots A_{k-1} B_k$$

is transient. We can remark that it was known (cf.[Ver79]) that in the centered case both the process $|Z_n|$ and $|Y_n|$, that have the same law for a fixed n , converge in probability to $+\infty$; but while Y_n is a recurrent process, we will prove that $|Z_n|$ converges almost surely to $+\infty$.

THEOREM 5.4.1. *Suppose that the hypotheses H1-3 are satisfied, that the marginal of μ on \mathbb{R}^d , that is the law of B_1 , has a bounded density and that $\mathbb{E}[|B_1|^\rho] < \infty$ for some $\rho > 1$, then almost surely for every g in $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b(gR_n)| = +\infty$$

FIG. 5.4.1 – partition of S_2 into “equipotential” squares

PROOF. We first observe that the d -dimensional affine group $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ may be projected on a one-dimensional affine group just taking the first coordinate $b_1(g)$ of the vector $b(g)$. As obviously when the first coordinate diverges also the vector diverge, we can restrict to the case $d = 1$ without loss of generality.

We will proceed as in the proof of theorem 5.2.1 and we will start to show that if $S = \{g \in \text{Aff}(\mathbb{R}) \mid |b(g)| \leq 1\}$, gR_n does not cross the border of S but a finite number of times. As we have seen in proposition 5.2.1, we only need to show that the potential of the function

$$\psi(g) = \mathbb{P}[gX_1 \in S] 1_{S^c}(g)$$

is finite. We will need to split the function ψ in two parts and study their potential with two different techniques. Let $S_1 = \{g \in \text{Aff}(\mathbb{R}) \mid |b(g)| > 1, a(g) \leq 1\}$ and $S_2 = \{g \in \text{Aff}(\mathbb{R}) \mid |b(g)| > 1, a(g) > 1\}$ so that :

$$\psi = \psi 1_{S_1} + \psi 1_{S_2} = \psi_1 + \psi_2$$

The integral of ψ_1 with respect with the right Haar measure was already calculated in the proof of the proposition 5.2.1 where we proved that

$$\iint \psi_1(a, b) \frac{db da}{a} = \mathbb{E} \left[\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} 1_{|b| \geq 1} 1_{|aB_1 + b| < 1} db \frac{da}{a} \right] \leq c \mathbb{E} [\log^+(|B_1|)]$$

so that $U^r \psi_1(g)$ is finite for almost all g .

It is easily checked that ψ_2 is not integrable for the right Haar measure so, to prove that its potential is finite, we will need to use a more adapted method. Let

$$F_1 = \{g \in \text{Aff}(\mathbb{R}) : 1 \leq a(g) < 2, 0 \leq b(g) < 1\}$$

and for every $k \in \text{Aff}(\mathbb{R})$

$$F_k = kF_1 = \{g \in \text{Aff}(\mathbb{R}) : a(k) \leq a(g) < 2a(k), b(k) \leq b(g) < a(k) + b(k)\}$$

As the random walk is transient and the sets F_k are relatively compact, their potential is bounded and we have for every k :

$$\|U^r 1_{F_k}\| = \sup_{g \in \text{Aff}(\mathbb{R})} |\delta_g * U(kF_1)| = \|U^r 1_{F_1}\|$$

We denote $-F_{(2^m, 2^{m_{n+1}})}$ the image of the set $F_{(2^m, 2^{m_{n+1}})}$ under the mapping $(a, b) \mapsto (a, -b)$ and we observe that $-F_{(2^m, 2^{m_{n+1}})} = F_{(2^m, -2^m(n+1)-1)}$; thus the family $\{F_{(2^m, 2^{m_{n+1}})}\}_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}} \cup \{-F_{(2^m, 2^{m_{n+1}})}\}_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}}$ is a partition of S_2 into “equipotential” squares. We observe that :

$$\begin{aligned} U^r \psi_2 &= \sum_{\substack{k=(2^m, 2^{m_{n+1}}) \\ n, m \in \mathbb{N}}} U^r(\psi_2 1_{F_k}) + U^r(\psi_2 1_{-F_k}) \\ &\leq \sum_{\substack{k=(2^m, 2^{m_{n+1}}) \\ n, m \in \mathbb{N}}} \|U^r 1_{F_k}\| \|\psi_2 1_{F_k}\| + \|U^r 1_{-F_k}\| \|\psi_2 1_{-F_k}\| \\ &= \|U^r 1_{F_1}\| \sum_{\substack{k=(2^m, 2^{m_{n+1}}) \\ n, m \in \mathbb{N}}} \|\psi_2 1_{F_k}\| + \|\psi_2 1_{-F_k}\| \end{aligned}$$

so that to prove that the potential is bounded we need to estimate the function ψ_2 on the sets F_k .

It may be worth observing that this approach allows us to compare the right potential kernel with something that roughly looks like a left invariant measure, in the sense that we sum the maximum of the function over a collection of sets obtained by left translation (and ψ_2 is integrable for the left Haar measure). The problem is that the size of the square on which we sum is fixed and we need the function ψ_2 to be smooth enough on them. Now if f is the bounded density of the law of B_1 , we have :

$$\mathbb{P}[gX_1 \in S] = \mathbb{P}\left[\frac{-1-b}{a} < B_1 < \frac{1-b}{a}\right] \leq \|f\| \frac{2}{a}$$

To control ψ_2 when b is big we observe that for every $p > 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[gX_1 \in S] &\leq \left(\frac{|b|-1}{a}\right)^{-\frac{p}{p-1}} \mathbb{E}\left[|B_1|^{\frac{p}{p-1}} 1_{\left[\frac{-1-b}{a}, \frac{1-b}{a}\right]}(B_1)\right] \\ &\leq \left(\frac{|b|-1}{a}\right)^{-\frac{p}{p-1}} \mathbb{E}[|B_1|^{\frac{p}{p-1}}]^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_{\frac{-1-b}{a}}^{\frac{1-b}{a}} f(x) dx\right)^{\frac{1}{p-1}} \\ &\leq 2^{\frac{1}{p-1}} \|f\|^{\frac{1}{p-1}} \mathbb{E}[|B_1|^{\frac{p}{p-1}}]^{\frac{1}{p-1}} \frac{a^{\frac{p}{p-1}-\frac{1}{p-1}}}{(|b|-1)^{\frac{p}{p-1}}} \end{aligned}$$

so that there exist $0 < \alpha < \beta$ and $\beta > 1$ such that $\psi(a, b) \leq C(a^\alpha |b|^{-\beta} \wedge a^{-1})$ for a suitable constant C . Then for every $g \in F_{(2^m, 2^{m_{n+1}})} \cup -F_{(2^m, 2^{m_{n+1}})}$

$$\psi(g) \leq C(2^{\alpha(m+1)}(2^m n + 1)^{-\beta} \wedge 2^{-m}) \leq C(2^{(\alpha-\beta)(m+1)} n^{-\beta} \wedge 2^{-m})$$

and using the decomposition (5.4.1) we have

$$U^r \psi_2 \leq \|U^r 1_{F_1}\| 2C \sum_{m,n \in \mathbb{N}} 2^{(\alpha-\beta)(m+1)} n^{-\beta} \wedge 2^{-m} < +\infty$$

So we proved that, for almost all $g \in \text{Aff}(\mathbb{R})$, gR_n can cross the border of S only a finite number of time.

Combining the recurrence of the real random walk $a(gR_n)$ and the transience of gR_n , we see that gR_n visits an infinite number of times the set $([1, 2] \times \mathbb{R}) \cap S^c$ so that, for almost all g , gR_n is definitely in S^c . As for every $s > 0$ the set of g such that

$$gS^c \subset \{(a, b) \in \text{Aff}(\mathbb{R}) : |b| > s\}$$

has positive Haar measure, we may conclude that for every $s > 0$ almost surely $b(R_n)$ is definitely greater than s , so that, letting s go to $+\infty$ on a countable sequence, we obtain that, almost surely, for every $g \in \text{Aff}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |b(gR_n)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |a(g)b(R_n) + b(g)| = +\infty$$

□

Stochastic locally contractive systems with speed

ABSTRACT. The auto-regressive model on \mathbb{R}^d defined by the recurrence equation $Y_n^y = a_n Y_{n-1}^y + B_n$, where $\{(a_n, B_n)\}_n$ is a sequence of i.i.d. random variables in $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$ has, in the critical case $\mathbb{E}[\log a_1] = 0$, a local contraction property, i.e. when Y_n^y is in a compact set the distance $|Y_n^y - Y_n^x|$ converges almost surely to zero. We determine the speed of this convergence and we use this asymptotic estimate to deal with some higher dimensional situations. In particular we prove the recurrence and the local contraction property with speed for an auto-regressive model whose linear part is given by triangular matrices with first Lyapounov exponent equal to zero. We extend the previous results to a Markov chain on a nilpotent Lie group induced by a random walk on a solvable Lie group of \mathcal{NA} type.

A dynamical system (\mathcal{X}, F) on a metric space (\mathcal{X}, d) is said to be stable or contractive, if, for any couple of points x and y in \mathcal{X} , the distance $d(F^n x, F^n y)$ converges to zero, i.e. asymptotically the evolution of the system does not depend on the starting point. This is the case, for instance, when F is a function with Lipschitz coefficient strictly less than 1. The same concept may be translated in a random setting. Suppose that we have an iterated function system (IFS), i.e. a Markov chain $\{Y_n^y\}_n$ defined recursively as

$$Y_n^y = F_n(Y_{n-1}^y) \quad Y_0^y = y$$

where $\{F_n\}_n$ is a sequence of i.i.d. random functions defined on a probability space (Ω, \mathbb{P}) . We say that the system is *strongly contractive* if the distance between the trajectories starting from any two fixed points x and y goes to zero \mathbb{P} -almost surely :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(Y_n^y, Y_n^x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(F_n \circ \dots \circ F_1 x, F_n \circ \dots \circ F_1 y) = 0.$$

This happens for instance when the functions $\{F_n\}_n$ are Lipschitz and are contractive in the mean (i.e. $\mathbb{E}[\log [F_n]_{\text{lip}}] < 0$, where $[F]_{\text{lip}}$ is the Lipschitz coefficient of F) and in this case it is also easy to see that $d(Y_n^y, Y_n^x)$ goes to zero exponentially fast.

Besides this situation, it is possible to have weaker but still interesting stability properties. Using an idea due to M. Babilot, Ph. Bougerol and L. Elie [BBE97], M. Benda [Ben] introduced the concept of *locally contractive* IFS when

the Markov chain $\{Y_n^y\}_n$ satisfies the following recurrence and local contraction properties :

- (R) For some y the set of accumulation points of the sequence $\{Y_n^y(\omega)\}_n$ is $\mathbb{P}(d\omega)$ -almost surely not empty.
- (C) For every compact set K of \mathcal{X} and every couple of starting points $x, y \in \mathcal{X}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1_K(Y_n^y) d(Y_n^y, Y_n^x) = 0 \quad \mathbb{P} - \text{almost surely}$$

If the metric space is locally compact and second countable, the local contraction property reinforces the recurrence of these systems. In fact the set of accumulation points of every trajectory $\{Y_n^y(\omega)\}_n$ does not depend neither on the chance ω nor on the starting point y ; this subset of \mathcal{X} is called the *attractor* of the process. Another remarkable property is that, if such a process has an invariant Radon measure (with finite or infinite total mass), it is unique and its support is the attractor set [Ben].

A typical example is given by the auto-regressive process Y_n^y defined on \mathbb{R}^d by

$$Y_n^y = a_n Y_{n-1}^y + B_n \quad Y_0^y = y$$

where $\{(a_n, B_n)\}_n$ are i.i.d. random variables with values in $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$, that is an IFS defined from a sequence of random affine transformations. In this case

$$Y_n^y - Y_n^x = e^{S_n} (y - x)$$

where

$$S_n = \sum_1^n \log a_i \quad \text{and} \quad S_0 = 0.$$

If $\mathbb{E}[\log a_1] < 0$, then $\frac{S_n}{n}$ converges to a negative number and $|Y_n^y - Y_n^x|$ goes to zero with an exponential speed, so that the system is strongly contractive in the sense above. But when $\mathbb{E}[\log a_1] = 0$, that is when the dilatation coefficient is centred, S_n is a recurrent random walk on \mathbb{R} , so that the distance $|Y_n^y - Y_n^x|$ cannot converge to zero. However it was shown by M. Babillot, Ph. Bougerol and L. Elie in [BBE97] that even in this case Y_n^y is a locally contractive system, which in this context means that, for every y and for every compact subset K of \mathbb{R}^d , $e^{S_n} 1_K(Y_n^y)$ converges almost surely to zero (see also [Bro] for an elementary proof of this fact).

One of the goals of this paper is to study in more detail this process and in particular to show that when the events $[Y_n^y \in K]$ occur, the random walk S_n must not only tend toward $-\infty$, but has also to be close to its minimal value. More precisely the first section of this paper is dedicated to the proof of the following

THEOREM 6.0.2. *Consider the auto-regressive process $\{Y_n^y\}_{n \in \mathbb{N}}$ defined above. We suppose that suitable irreducibility (6.1.1) and moment (6.1.2) conditions hold (see section 1) and that*

$$\mathbb{E}[\log a_1] = 0.$$

Set $M_n = \min \{S_k, k = 0 \dots n\}$. Then for any compact set $K \subset \mathbb{R}^d$ and any point $y \in \mathbb{R}^d$, we have

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Y_n^y \in K}} \frac{S_n}{M_n} = 1 \quad \mathbb{P} - \text{almost surely.}$$

In particular using classical results on the minimal values of a recurrent random walk on \mathbb{R} , this gives a speed for the rate of contraction :

COROLLARY 6.0.1. *If we reinforce the hypotheses of Theorem 6.0.2 and assume that $|\log a_1|^3$ is integrable then*

$$\limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Y_n^y \in K}} \frac{\log |Y_n^y - Y_n^x|}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} < 0.$$

In particular for any $\chi < \frac{1}{2}$ one has

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Y_n^y \in K}} e^{n^\chi} |Y_n^y - Y_n^x| = 0$$

It is natural and interesting in various applications to consider auto-regressive models of higher dimensions, i.e processes on \mathbb{R}^d defined recursively by

$$Y_n^y = A_n Y_{n-1}^y + B_n \quad \text{and} \quad Y_0^y = y$$

where now $\{(A_n, B_n)\}_n$ is a sequence of i.i.d. random variables in $M(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d$. If the positive part of $\log \|A_1\|$ is integrable, it is possible to define the *first Lyapounov exponent* as the almost-sure limit

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_n \cdots A_1\|.$$

This quantity will naturally play the role that $\mathbb{E}[\log a_1]$ had in the one dimensional case. The case $\lambda_1 < 0$ is well understood (see for instance [Kes73], [LP83]) and one knows that, under some moment conditions, Y_n^y is a recurrent and strongly contractive process. Less is known for the critical case $\lambda_1 = 0$. We conjecture that in this situation (at least if λ_1 is simple) Y_n^y is recurrent and satisfies the local contraction property. Although this seems hard to be proved in full generality, we shall in the second part of this paper provide some examples where this conjecture holds. For this we shall apply the quantitative estimate of Corollary 6.0.1 to some cases where the matrices A_n are triangular. A different situation where the

conjecture might be easier to check arises when one supposes that the laws of the vector B_1 and of the matrix A_1 have a rotation invariant density. In this situation, using some of the results of the present paper, Ph. Bougerol has noticed that the process Y_n^y can be proved to be recurrent, but we do not yet know whether it is a locally contractive system.

Our first example where the conjecture holds is given when the diagonal matrices $\begin{bmatrix} a_n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$ in the previous model are perturbed by a unipotent factor ; thus we consider an auto-regressive scheme $Y_n^y = A_n Y_{n-1}^y + B_n$ obtained recursively by the action on \mathbb{R}^d of i.i.d. random affine transformations whose linear part are upper triangular matrices of the form

$$(6.0.1) \quad A_n = \begin{bmatrix} a_n & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$$

where $a_n > 0$. We shall obtain that, when $\mathbb{E}[\log a_1] = 0$, this system is still locally contractive.

A more intricate situation arises when the matrices A_n have different eigenvalues. We consider the particular case when

$$(6.0.2) \quad A_n = \begin{bmatrix} A_n^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n^k \end{bmatrix}$$

and the sub-matrices A_n^i are ‘‘Jordan blocks’’ of the previous type (6.0.1). One of the problems that often arises in higher dimensions is that it is much more difficult to obtain recurrent systems. For instance, we can observe that in the simplest

case where the matrices A_n are diagonal $\begin{bmatrix} a_n^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{bmatrix}$, the translation part is

$B_n = \begin{pmatrix} b_n^1 \\ \vdots \\ b_n^k \end{pmatrix}$ and the variables (a_n^i, b_n^i) for $i = 1 \dots k$ are mutually independent

(then we just deal with k independent random walks on the one dimensional affine group), we cannot have recurrence of the auto-regressive model if three or more of the eigenvalues a_n^i are centred. Indeed it follows from the local limit theorem on the affine group ([LPP97]) that, if q is the number of centred eigenvalues, for every compact set the probability $\mathbb{P}[Y_n^y \in K]$ goes to zero as $n^{-\frac{q}{2}}$; thus if $q \geq 3$, the series $\sum \mathbb{P}[Y_n^y \in K]$ converges and the expected number of visits of Y_n^y in K is finite, so that in this case the auto-regressive process cannot have any accumulation point.

In order to simplify, we will consider, in the sequel, the case where only one eigenvalue is centred while the others are negative in mean :

THEOREM 6.0.3. *Let $a_n^i, i = 1 \dots k$ be the eigenvalues of the matrices A_n of the type (6.0.2) and suppose that suitable irreducibility and moment hypotheses hold. If there exists i_0 such that*

$$\mathbb{E}[\log a_n^{i_0}] = 0 \text{ and } \mathbb{E}[\log a_n^i] < 0 \text{ for all } i \neq i_0$$

then the Markov chain Y_n^y defined by $Y_n^y = A_n Y_{n-1}^y + B_n$ is a locally contractive system with a speed greater than $e^{-c\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}}$ for some constant $c > 0$.

The case where only two eigenvalues are centred is also interesting, but involves others considerations, which will not be developped here.

Another way to extend the results on the real affine group is to consider a more abstract situation where an Abelian Lie group \mathcal{A} acts on a nilpotent Lie group \mathcal{N} . In the third and last section we will be able to deduce from the previous results that the left random walk on the group $\mathcal{N}\mathcal{A}$ induces on \mathcal{N} a Markov chain that is a locally contractive system.

We point out that our results hold without any density assumption on the law of the random variables (A_n, B_n) , and thus are applicable to IFS, generated by a finite number of functions chosen at random.

We remark that the hypothesis requiring that the linear part of the affine actions have only real positive eigenvalue is not essential. Indeed it is possible to generalize these results to auto-regressive models $Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n$ where the matrices A_n are in $\mathbb{R}_+^* \times O(\mathbb{R}^d)$ or are in the ‘‘Jordan form’’ (6.0.2) but with complex coefficients.

I would like to thank Martine Babillot for her great support during the whole elaboration of this paper and Marc Peigné for kindly for his careful reading a preliminar version of this paper.

6.1. Local contraction speed

As said above, we shall first concentrate on the ‘‘one dimensional’’ situation where the auto-regressive model is given by the action of \mathbb{R}^* on \mathbb{R}^d and we give a quantitative estimate of the speed of the local contraction when the dilatation coefficient is centred. We first introduce some notations, hypotheses and preliminary results, then we give a proof of Theorem 6.0.2.

We will denote by $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ the group of affine transformations of the Euclidean space \mathbb{R}^d of the form

$$g = (a, B) : x \mapsto g \cdot x = ax + B$$

where a is a positive real number and B a vector in \mathbb{R}^d , thus $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ may be identified with $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$. We will denote a and b the projection of $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ on \mathbb{R}_+^* and \mathbb{R}^d respectively, so that $g = (a(g), b(g))$ for each $g \in \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$.

Let $g_n = (a_n, B_n)$ be a sequence of independent identically distributed random variables defined on the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ with values in $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$. The (left) *random walk* is the Markov chain on $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ defined recursively by

$$L_{n+1} = g_{n+1}L_n \quad L_0 = 1_{\text{Aff}(\mathbb{R}^d)}$$

The auto-regressive model may be seen as the process induced on \mathbb{R}^d by the random walk on $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$; indeed, if Y_n^y denotes the process

$$Y_n^y = L_n \cdot y \quad Y_0^y = y$$

then it satisfies the equation $Y_n^y = a_n Y_{n-1}^y + B_n$. The starting point y is a random vector independent of the increments g_n and we denote by \mathbb{P}_ν and \mathbb{E}_ν the probability and the expectancy under which the distribution of y is ν ; we will use the same notations when the measure ν is not a probability, so that \mathbb{P}_ν may have an infinite mass.

We will assume the following irreducibility conditions

$$(6.1.1) \quad \forall y : \mathbb{P}[a_1 y + B_1 = y] < 1 \text{ and } \mathbb{P}[a_1 = 1] < 1$$

which means that the random walk does not live in the translation group or in the group of homotheties.

We observe that

$$S_n = \log(a(L_n)) = \sum_{k=0}^n \log a_k$$

is just a sum of real valued i.i.d. random variables. When the variable $\log a_1$ is integrable and $\mathbb{E}[\log a_1] < 0$, the system is strongly contractive with an exponential speed; furthermore, if $\mathbb{E}[\log^+ |B_1|]$ is finite, then Y_n^y is ergodic and has a unique invariant probability measure. We will deal with the more delicate case where the strong contraction property does not hold; our main assumption in this section is that

$$\mathbb{E}[\log a_1] = 0$$

so that S_n is a recurrent random walk on \mathbb{R} . In this case Y_n^y is still recurrent and it has a unique invariant Radon measure [BBE97], but this measure is not a probability [BP92].

In the sequel we will reinforce the moment hypotheses as follows

$$(6.1.2) \quad \mathbb{E}[|\log a_1|^2] < \infty \text{ and } \mathbb{E}[(\log^+ |B_1|)^{2+\delta}] < \infty \text{ for some } \delta > 0$$

In order to approach the study of a centred random walk we will use a classical technique in this situation and extract a strictly decreasing sub-random walk. We first introduce the sequence of stopping times at which the random walk S_n reaches a new minimum, generally known as *ladder stopping times* :

$$l_n = \inf\{k > l_{n-1} : S_k - S_{l_{n-1}} < 0\}$$

for all $n \geq 1$ and $l_0 = 0$. The sequence $\{L_{l_n}\}_n$ is still a random walk on $\text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ since each element is the product of the independent random variables $L_{l_k} L_{l_{k-1}}^{-1} = g_{l_k} \cdots g_{l_{k-1}+1}$ that have all the same distribution as L_{l_1} . The second moment conditions (6.1.2) has been shown (see [Éli82]) to be sufficient to guarantee that

$$(6.1.3) \quad \mathbb{E}[|\log(a(L_{l_1}))|] < +\infty \text{ and } \mathbb{E}[\log^+ |b(L_{l_1})|] < \infty.$$

Thus L_{l_n} is a random walk with first moment and such that $\log a(L_{l_1}) = S_{l_1} < 0$; the extracted Markov chain $Y_{l_n}^y = L_{l_n} \cdot y$ is then an ergodic Markov chain with a unique invariant probability measure that we will denote by ν^l .

The recurrence of the sub-chain $Y_{l_n}^y$ implies that Y_n^y is also recurrent. Even if Y_n^y has no invariant probability measure it has a unique invariant Radon measure ν . This in particular implies that for, almost every y , the process Y_n^y visits infinitely often every subset K of \mathbb{R}^d of positive ν -measure. Then we can consider the sequence of stopping times at which Y_n^y enters in K

$$t_n^K = t_n^{y,K} = \inf\{k > t_{n-1}^{y,K} : Y_k^y \in K\}$$

for all $n \geq 1$ and $t_0^K = 0$. The restricted process to K , $Y_{t_n^K}^y$, is then a Markov chain with invariant probability $\nu_K(\cdot) = \frac{\nu(\cdot \cap K)}{\nu(K)}$ ([MT93] thm.10.4.7).

The uniqueness of the invariant measure of process Y_n^y is a consequence of the local contraction property that was also shown in [BBE97]; for every x and y in \mathbb{R}^d we have :

$$(6.1.4) \quad |Y_n^y - Y_n^x| 1_K(Y_n^y) = e^{S_n} |y - x| 1_K(L_n \cdot y) \rightarrow 0 \quad \mathbb{P} - \text{almost surely.}$$

Thus we have $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{t_n^{y,K}} = -\infty$ and the goal of this section is to estimate the speed of this convergence.

Our first step is to prove that the sequence $S_{t_n^{y,K}}$ satisfies a law of large numbers.

PROPOSITION 6.1.1. *Suppose that the hypotheses (6.1.1) and (6.1.2) hold and that $\mathbb{E}[\log a_1] = 0$, then there is a compact set K_0 such that for every $K \supseteq K_0$ with $\nu(K) < \infty$ one has*

$$-\infty < \mathbb{E}_{\nu_K} [S_{t_1^K}] < 0$$

and

$$\frac{S_{t_n^{y,K}}}{n} \rightarrow \mathbb{E}_{\nu_K} [S_{t_1^K}] \quad \mathbb{P}_{\nu_K} - \text{almost surely}$$

PROOF. We first observe that under the probability \mathbb{P}_{ν_K} the sequence

$$S_{t_n^{y,K}} = \sum_{k=1}^n S_{t_{k+1}^{y,K}} - S_{t_k^{y,K}}$$

is a sum of stationary real random variables. In fact the process :

$$W_n = (S_{t_{n+1}^{y,K}} - S_{t_n^{y,K}}, Y_{t_n^{y,K}}^y)$$

is a Markov chain on $\mathbb{R} \times K$ whose invariant probability measure is given by

$$m(f) = \mathbb{E}_{\nu_K} \left[f(S_{t_1^{y,K}}, y) \right].$$

We recall the following ergodic lemma first proved by Kesten (see Lemma 2.3 in [BL85] for a proof)

LEMMA 6.1.2. *Let $\{X_n\}_n$ be a sequence of stationary real variables such that $\mathbb{E}[X_1^-] < +\infty$ and*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n X_k = -\infty \text{ almost surely}$$

then $\mathbb{E}[|X_1|]$ is finite and $\mathbb{E}[X_1] < 0$.

As a direct consequence one obtains

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n X_k}{n} = \mathbb{E}[X_1] \text{ almost surely}$$

By the local contraction property we already know that $S_{t_n^{y,K}}$ converges to $-\infty$. If we show that $\mathbb{E}_{\nu_K} [S_{t_1^K}] > -\infty$, we will be able to conclude that $\mathbb{E}_{\nu_K} [S_{t_1^K}] < 0$ and

$$\frac{S_{t_n^{y,K}}}{n} \rightarrow \mathbb{E}_{\nu_K} [S_{t_1^K}] \quad \mathbb{P}_{\nu_K} - \text{almost surely}.$$

Let us first notice that the entrance time t_1^K is not integrable, because the random walk is centred. In order to show that $S_{t_1^K}$ is integrable, we shall bound it from below by the strictly decreasing random walk S_{l_n} .

Let \bar{t}^K be the first time at which $Y_{l_n}^y$ enters in K . Since $Y_{l_{\bar{t}^K}}^y \in K$ we have $t_1^K \leq l_{\bar{t}^K}$; on the other hand for every $k \leq l_n$, one has $S_k \geq S_{l_n} = M_{l_n}$, and so $S_{t_1^K} \geq S_{l_{\bar{t}^K}}$.

We have remarked that under the moment assumption (6.1.2) the random walk L_{l_n} is integrable in the sense (6.1.3) and, since $\log a(L_{l_1}) < 0$, we can apply to L_{l_n} the following lemma. Its proof is rather technical and it is postponed in the appendix.

LEMMA 6.1.3. *Let $\{(a_n, B_n)\}_n \subset \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ be a sequence of independent identically distributed random variables. Suppose that the irreducibility hypothesis (6.1.1) holds and that*

$$\mathbb{E}[|\log a_1|] < +\infty \text{ and } \mathbb{E}[\log^+ |B_1|] < \infty.$$

Assume furthermore that $\mathbb{E}[\log a_1] < 0$. Let $Y_n^y = a_n Y_{n-1}^y + B_n$ be the induced process on \mathbb{R}^d and $t_n^K = t_n^{y,K}$ the sequence of entrance time of Y_n^y in K . Then

there is a compact set K_0 such that for every $K \supseteq K_0$ and every compact set C it exists a constant $M = M(C, K)$ satisfying the following property :

$$\text{for all } x \in C \quad \mathbb{E}_x [t_1^K] < M \text{ and } \mathbb{E}_x [S_{t_1^K}] > M\mathbb{E}[\log a_1].$$

Since \bar{t}^K it is the first time on which $Y_{l_n}^y$ enters in K (that we have chosen sufficiently large), there is a constant M_0 such that for every $x \in K$, $\mathbb{E}_x [S_{l_{\bar{t}^K}}] > M_0$; thus, when y is distributed as ν_K , $\mathbb{E}_{\nu_K} [S_{l_{\bar{t}^K}}] > M_0$. Finally

$$\mathbb{E}_{\nu_K} [S_{t_1^K}] \geq \mathbb{E}_{\nu_K} [S_{l_{\bar{t}^K}}] > -\infty$$

which ends the proof of Proposition 6.1.1.

□

We are now able to give a rate of escape of S_n restricted to the events $[Y_n^y \in K]$.

THEOREM 6.1.1. *Suppose that the hypotheses (6.1.1) and (6.1.2) hold and let*

$$M_n = \min_{k=0\dots n} S_k,$$

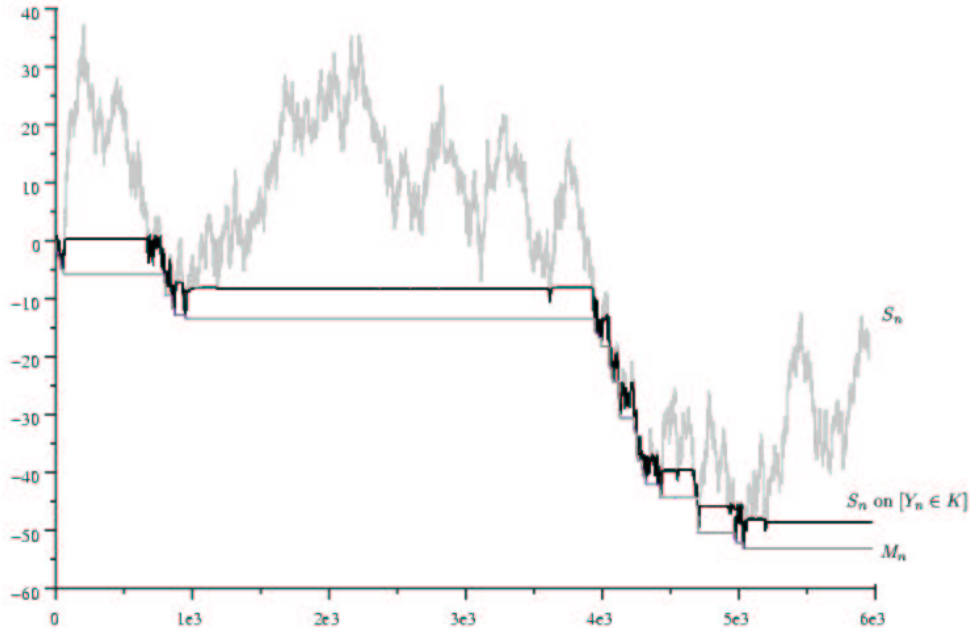
then for every compact set $K \subset \mathbb{R}^d$ and every $x \in \mathbb{R}^d$

$$(6.1.5) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ Y_n^x \in K}} \frac{S_n}{M_n} = 1 \quad \mathbb{P} - \text{almost surely.}$$

In particular if $\mathbb{E}[|\log a_1|^3] < \infty$

$$\limsup_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ Y_n^x \in K}} \frac{S_n}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} \leq -\frac{\pi}{2} \sqrt{\mathbb{E}[(\log a_1)^2]} \quad \mathbb{P} - \text{almost surely.}$$

The following picture shows the result of a simulation of the processes S_n and M_n . We have also drawn the trajectory S_n restricted to the events $[Y_n^y \in K]$.



PROOF. Before we starting with the proof we recall that the unique invariant Radon of the process Y_n^y measure can be obtained by the formula $\nu(f) = \frac{\mathbb{E}_{\nu^l}[\sum_{n=0}^{l_1-1} f(Y_n^y)]}{\mathbb{E}[-S_{l_1}]}$ where l_1 is the first ladder time and ν^l the invariant probability measure of the extracted chain $Y_{l_n}^y$.

We also know ([BBE97] Theorem 4.1) that for every set K such that $\nu(K)$ is positive and finite

$$\frac{\sum_{k=0}^n 1_K(Y_k^y)}{M_n} \rightarrow -\nu(K) \quad \mathbb{P}_{\nu^l} - \text{almost surely,}$$

thus \mathbb{P}_{ν^l} -almost surely :

$$\frac{\sum_{k=0}^{t_n^{y,K}} 1_K(Y_k^y)}{M_{t_n^{y,K}}} = \frac{n}{M_{t_n^{y,K}}} \rightarrow -\nu(K)$$

Since ν^l is absolutely continuous with respect to ν , the previous proposition implies that, for any sufficiently large compact set K , the sequence $\frac{S_{t_n^{y,K}}}{n}$ converges

$\mathbb{P}_{\nu_K^l}$ -almost surely to $\mathbb{E}_{\nu_K} [S_{t_1^K}]$ and then :

$$(6.1.6) \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ Y_n^y \in K}} \frac{S_n}{M_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{t_n^{y,K}}}{M_{t_n^{y,K}}} = -\nu(K) \mathbb{E}_{\nu_K} [S_{t_1^K}]$$

$\mathbb{P}_{\nu_K^l}$ -almost surely.

If $\nu^l(K) > 0$, the events $[Y_{l_n}^y \in K]$ occur infinitely often so that

$$\left\{ \frac{S_{l_n}}{M_{l_n}} \mid n \in \mathbb{N}, Y_{l_n}^y \in K \right\} \subset \left\{ \frac{S_n}{M_n} \mid n \in \mathbb{N}, Y_n^y \in K \right\}$$

is a true sub-sequence. Then since $\frac{S_{l_n}}{M_{l_n}} = 1$ a.s., for all n , we have

$$-\nu(K) \mathbb{E}_{\nu_K} [S_{t_1^K}] = 1.$$

So that the limit (6.1.5) holds $\mathbb{P}_{\nu_K^l}$ -almost surely.

To conclude we just need to show that we have the limit (6.1.5) for all starting points and this will be a consequence of the local contraction property. Let $x \in \mathbb{R}^d$ be fixed and $K_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^d : d(z, K) \leq \varepsilon\}$. From (6.1.6) it follows in particular that there is at least a point $y \in \mathbb{R}^d$ such that on the events $Y_n^y \in K_\varepsilon$, the sequence $\frac{S_n}{M_n}$ converges \mathbb{P} -almost surely to 1. On the other hand the local contraction property (6.1.4) ensures that \mathbb{P} -almost all $\omega \in \Omega$, there is $N(\omega) \in \mathbb{N}$ such that for every $n \geq N$

$$Y_n^x(\omega) \in K \Rightarrow Y_n^y(\omega) \in K_\varepsilon$$

so that

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ Y_n^x \in K}} \frac{S_n}{M_n} = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ Y_n^y \in K_\varepsilon}} \frac{S_n}{M_n} = 1.$$

Finally classical results on the minima of a real random walk (see K.L.Chung [Chu48]) give the behaviour of the superior limit of M_n and then of S_n

$$\begin{aligned} \limsup_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ Y_n^x \in K}} \frac{S_n}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} &= \limsup_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ Y_n^x \in K}} \frac{S_n}{M_n} \frac{M_n}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} \\ &= \limsup_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ Y_n^x \in K}} \frac{M_n}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} \\ &\leq -\frac{\pi}{2} \sqrt{\mathbb{E}[(\log a_1)^2]} \end{aligned}$$

□

6.2. “Jordan blocks”

This section will be dedicated to some higher dimensional examples, when the dilatation coefficients are matrix valued. The goal is to show that an autoregressive model whose linear parts are matrices composed of “Jordan blocks” (6.0.2) is a locally contractive system, but before dealing with this general situation, we consider the case where we have just one block.

We consider the group \mathcal{A} of upper triangular matrices in $\text{GL}(\mathbb{R}^d)$ with all diagonal coefficients equal to the same real positive number. We will denote by $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ the additive homomorphism such that for every $A \in \mathcal{A}$:

$$(6.2.1) \quad A = \begin{bmatrix} e^{\alpha(A)} & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & e^{\alpha(A)} \end{bmatrix}$$

Every element of \mathcal{A} may be written in the form $A = \exp(\alpha(A)I + N)$ for some N in the algebra $\mathfrak{N}(d)$ of nilpotent matrices of order d .

We consider the group $\mathcal{A} \rtimes \mathbb{R}^d$, semi-direct product of \mathcal{A} acting on $(\mathbb{R}^d, +)$ by canonical action ; it can be represented as the group of matrices of the form :

$$(6.2.2) \quad \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^\alpha & * & * & \\ & \ddots & * & B \\ 0 & & e^\alpha & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Let $g_n = (A_n, B_n)$ be a sequence of independent and identically distributed random variables with values in $\mathcal{A} \rtimes \mathbb{R}^d$; set $L_n = g_n \cdots g_1$ the left random walk and

$$Y_n^y = A_n Y_{n-1}^y + B_n = L_n \cdot y \quad Y_0^y = y$$

the associated Markov chain on \mathbb{R}^d .

Under a first order moment hypothesis, the Lyapounov exponent of the matrices A_n is $\mathbb{E}[\alpha(A_1)]$, so that if $\mathbb{E}[\alpha(A_1)] < 0$ the system Y_n^y is strongly contractive and it is recurrent as soon as $\mathbb{E}[\log^+ |B_1|]$ is finite. We will now focus on the situation

$$\mathbb{E}[\alpha(A_1)] = 0$$

and show that also in that case we have a local contraction property.

We set $\alpha_n = \alpha(A_n)$ so that $A_n = \exp(\alpha_n I + N_n)$ where $\{(\alpha_n, N_n)\}_n$ is a sequence of i.i.d. random variables with values in $\mathbb{R} \times \mathfrak{N}(d)$.

We introduce the irreducibility conditions

$$(6.2.3) \quad \forall y \in \mathbb{R}^d : \mathbb{P}[(A_1 y + B_1)^{(d)} = y^{(d)}] < 1 \\ \mathbb{P}[\alpha_1 = 0] < 1$$

where $B_1^{(d)}$ is the d -component of the vector B_1 and the following moment hypotheses

$$(6.2.4) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}[|\alpha_1|^3] &< +\infty \\ \mathbb{E}[|N_1|] &< +\infty \\ \mathbb{E}[|\log(B_1)|^{2+\delta}] &< +\infty \quad \text{for some } \delta > 0 \end{aligned}$$

PROPOSITION 6.2.1. *Assume that the hypotheses (6.2.3) and (6.2.4) hold and $\mathbb{E}[\alpha_1] = 0$. Then the Markov chain Y_n^y satisfies the local contraction property with a speed greater than $e^{-c\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}}$ for some constant $c > 0$.*

PROOF. Let denote by $v^{(d)}$ the d^{th} component of the vector v . We observe that

$$(Ay + B)^{(d)} = e^{\alpha(A)}y^{(d)} + B^{(d)}$$

The mapping

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathbb{R}^d &\rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}) \\ (A, B) &\mapsto (e^{\alpha(A)}, B^{(d)}) \end{aligned}$$

is then a homomorphism of groups and the sequence

$$(Y_n^y)^{(d)} = e^{\alpha_n}(Y_{n-1}^y)^{(d)} + B_n^{(d)}.$$

is a Markov chain on the real line induced by a random walk on the affine group. We can apply to $(Y_n^y)^{(d)}$ the results of the previous section, so that we obtain

$$\limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Y_n^y \in K}} \frac{\alpha_n + \cdots + \alpha_1}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} \leq \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (Y_n^y)^{(d)} \in K^{(d)}}} \frac{\alpha_n + \cdots + \alpha_1}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} < 0$$

\mathbb{P} -almost surely.

Let denote by $\|\cdot\|$ the canonical norm on $\text{GL}(\mathbb{R}^d)$, so that

$$|Y_n^y - Y_n^x| = |A_n \cdots A_1(x - y)| \leq \|A_n \cdots A_1\| |y - x|.$$

As $A_i = \exp(\alpha_i I + N_i)$ with $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $N_i \in \mathfrak{N}(d)$ and $\mathfrak{N}(d)$ commute with \mathbb{R} we have

$$A_n \cdots A_1 = \exp(\alpha_n + \cdots + \alpha_1) \exp(N_n) \cdots \exp(N_1)$$

Since $\mathfrak{N}(d)$ is a nilpotent algebra it is possible ([Éli82]) to find a polynomial function Q from \mathbb{R} in \mathbb{R}_+ such that for every $n \in \mathbb{N}$ and every $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \|A_n \cdots A_1\| &= \exp(\alpha_n + \cdots + \alpha_1) \|\exp(N_n) \cdots \exp(N_1)\| \\ &\leq \exp(\alpha_n + \cdots + \alpha_1) Q(\|N_1\| + \cdots + \|N_n\|) \end{aligned}$$

On the other hand by the strong law of large numbers

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|N_1\| + \cdots + \|N_n\|}{n} = \mathbb{E}[\|N_1\|]$$

so that $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log Q(\|N_1\| + \dots + \|N_n\|)}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} = 0$. Then we can conclude that

$$\begin{aligned} \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Y_n^y \in K}} \frac{\log |Y_n^y - Y_n^x|}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} &\leq \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Y_n^y \in K}} \frac{\log (\|A_n \cdots A_1\| |y - x|)}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} \\ &\leq \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Y_n^y \in K}} \frac{(\alpha_n + \dots + \alpha_1) + \log Q(\|N_1\| + \dots + \|N_n\|)}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} < 0. \end{aligned}$$

□

We will now consider the situation where the matrices A_n have more than one ‘‘Jordan block’’. We show that, when one of the eigenvalues is centred, while the others are contractive, the auto-regressive model $Y_n^y = A_n Y_{n-1}^y + B_n$ has a local contraction property and it is recurrent, hence it defines a locally contractive system.

Let us fix some notations. Let now \mathcal{A} be the group of the matrices

$$(6.2.5) \quad A = \begin{bmatrix} A^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A^k \end{bmatrix}$$

where the diagonal blocks A^i are of the form (6.2.1) and let $\alpha^1 \dots \alpha^k$ be the homomorphisms from \mathcal{A} to \mathbb{R} such that :

$$(6.2.6) \quad A^i = \exp(\alpha^i(A) + N^i)$$

where N^i are nilpotent matrices of order d^i .

Then the group \mathcal{G} of the matrices $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, where B is a vector on \mathbb{R}^d and A is a matrix of the form (6.2.5), is the direct product of groups $\mathcal{A}^i \times \mathbb{R}^{d^i}$ of the type we have studied in the previous sub-section. We denote by $A(\cdot)$ and $B(\cdot)$ the projections of \mathcal{G} on \mathcal{A} and \mathbb{R}^d respectively, so that $g = \begin{bmatrix} A(g) & B(g) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

From now on, $g_n = (A_n, B_n)$ will be a sequence of \mathcal{G} -valued independent and identically distributed random variables, $L_n = g_n \cdots g_1$ will denote the left random walk on \mathcal{G} and

$$Y_n^y = A_n Y_{n-1}^y + B_n = L_n \cdot y$$

the associated auto-regressive scheme. For every n , we will denote by $\alpha_n^i = \alpha^i(A_n)$ the logarithms of the eigenvalues of the matrices A_n and N_n^i the nilpotent matrices

of the decomposition (6.2.6). We need the following moment hypotheses

$$(6.2.7) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left[|\alpha_1^i|^{3+\delta} \right] &< +\infty \quad \text{for some } \delta > 0 \\ \sum_{i=1}^k \mathbb{E} [\|N_1^i\|] &< +\infty \\ \mathbb{E} \left[((\log^+ |B_1|)^{2+\delta}) \right] &< +\infty \quad \text{for some } \delta > 0 \end{aligned}$$

We can now show

THEOREM 6.2.1. *Suppose that (6.2.7) is satisfied and that it exists i_0 such that*

$$\mathbb{E}[\alpha_n^{i_0}] = 0 \text{ and } \mathbb{E}[\alpha_n^i] < 0 \text{ for all } i \neq i_0.$$

If the sequence of random transformations $(A_n^{i_0}, B_n^{i_0})$ satisfies the irreducibility hypothesis (6.2.3), then the Markov chain $\{Y_n^y\}_n$ is a locally contractive system with a local contraction speed greater than $e^{-c\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}}$ for some constant $c > 0$.

PROOF. The local contraction property is nearly a direct consequence of the Proposition 6.2.1. In fact

$$(6.2.8) \quad \begin{aligned} \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Y_n^y \in K}} \frac{\log |Y_n^y - Y_n^x|}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} &\leq \\ &\leq \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Y_n^y \in K}} \frac{\log k + \max_{i=1 \dots k} \log (\|A_n^i \cdots A_1^i\| |y - x|)}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} \end{aligned}$$

For $i = i_0$ we can apply Proposition 6.2.1 to the random walk on $\mathcal{A}^{i_0} \times \mathbb{R}^{d^{i_0}}$ obtained by projection from \mathcal{G} and we have

$$\limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Y_n^y \in K}} \frac{\log \|A_n^{i_0} \cdots A_1^{i_0}\|}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} \leq \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Y_n^{i_0, y} \in K^{i_0}}} \frac{\log \|A_n^{i_0} \cdots A_1^{i_0}\|}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} < 0$$

where K^{i_0} and $Y_n^{i_0, y}$ are the projections of K and Y_n^y on the subspace of \mathbb{R}^d on which acts \mathcal{A}^{i_0} .

When $i \neq i_0$ the strong law of large number readily implies that $\frac{\alpha_1^i + \dots + \alpha_n^i}{n}$ converges almost surely to $\mathbb{E}[\alpha_1^i]$; since $\mathbb{E}[\alpha_1^i]$ is strictly negative, the diagonal part of the product $A_n^i \cdots A_1^i$ converges exponentially fast to zero. On the other hand the norm nilpotent part can be dominated by a polynomial function Q^i in

the sum of the norm so that, for the law of the large number, it has at most a polynomial growth; in conclusion we have

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|A_n^i \cdots A_1^i\|}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} &\leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha_n^i + \cdots + \alpha_1^i) + \log Q^i (\|N_1^i\| + \cdots + \|N_n^i\|)}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} = -\infty \end{aligned}$$

We shall now prove the recurrence property, showing that the set of accumulation points of the sequence $\{Y_n^y(\omega)\}_n$ is $\mathbb{P}(d\omega)$ -almost surely not empty.

As in the first section, we consider the ladder times for the greatest eigenvalue

$$l_n = \inf\{k > l_{n-1} : \alpha_k^{i_0} + \cdots + \alpha_{l_{n-1}+1}^{i_0} < 0\} \quad l_0 = 0$$

and the increments $L_{l_{n+1}}^{l_n} := g_{l_{n+1}} \cdots g_{l_n+1}$. These increments form a sequence of i.i.d. random variables in \mathcal{G} so that $L_{l_n} = L_{l_n}^{l_{n-1}} \cdots L_{l_1}^0$ may be seen as a left random walk whose steps are distributed as L_{l_1} . If we show that L_{l_1} has a first moment, then the infinite sum

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A(L_{l_1}^0) \cdots A(L_{l_n}^{l_{n-1}}) B(L_{l_{n+1}}^{l_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_{l_1}^0 \cdots L_{l_{n+1}}^{l_n} \cdot 0$$

converges because $\left| A(L_{l_1}^0) \cdots A(L_{l_n}^{l_{n-1}} - 1) B(L_{l_{n+1}}^{l_n}) \right|$ goes to 0 exponentially fast (in fact the mean of the eigenvalues of $A(L_{l_n}^{l_{n-1}} - 1)$ is negative, so that the diagonal part of their products converges to zero exponentially fast; thus it dominates the norm of nilpotent part that is at most polynomial and the B terms whose logarithms are integrable). The distribution of this sum is an invariant probability measure for the chain $Y_{l_n}^y$ and it is the only one because the system is contractive. Thus $Y_{l_n}^y$ has a unique invariant probability measure and it is recurrent. We then conclude that the set of accumulation points of $\{Y_n^y(\omega)\}_n$ is not empty since it contains the set of accumulation points of $\{Y_{l_n}^y(\omega)\}_n$.

Thus it remains to check the moment condition on L_{l_1} . Let

$$L_{l_1} = \begin{bmatrix} A_{l_1} \cdots A_1 & B_{0,l_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

then we have to show that the positive parts of $\log \|A_{l_1} \cdots A_1\|$ and $\log |B_{0,l_1}|$ are integrable.

We will first show that $\max_{j=l_1 \dots 1} \log^+ \|A_{l_1} \cdots A_j\|$ is integrable or equivalently that

$$(6.2.9) \quad \mathbb{E} \left[\max_{j=l_1 \dots 1} \log^+ \|A_{l_1}^i \cdots A_j^i\| \right] < +\infty \text{ for all } i = 1 \dots k.$$

We observe that there exist k polynomial functions Q^i from \mathbb{R} to \mathbb{R}^+ such that

$$\begin{aligned} \|A_{l_1}^i \cdots A_j^i\| &= e^{\alpha^i(A_{l_1}^i \cdots A_j^i)} \|\exp(N_{l_1}) \cdots \exp(N_j)\| \\ &\leq e^{\alpha^i(A_{l_1}^i \cdots A_j^i)} Q^i(\|N_{l_1}^i\| + \cdots + \|N_j^i\|) \end{aligned}$$

We use now the following property often used in this context (cf. L. Elie [Éli82] and A. K. Grincevičjus [Gri75]) whose proof may be found in [CKW94], Proposition 4 :

LEMMA 6.2.2. *Let $\{X_n\}_n$ be a sequence of identically distributed positive real random variables adapted to a filtration $\{\mathcal{F}_n\}_n$ such that, for every n , X_n is independent from \mathcal{F}_{n-1} and let τ be a \mathcal{F}_n -stopping time. If, τ^α and $X_1^{\frac{1}{\alpha}}$ are integrable for some $\alpha < 1$, then $\max_{k=1 \dots \tau} X_k$ is integrable.*

Since $(\log^+ \|N_1^i\|)^{2+\varepsilon}$ and $l_1^{\frac{1}{2+\varepsilon}}$ are integrable (cf. [Spi64]), we conclude at once that for all $i = 1 \dots k$

$$\mathbb{E} \left[\max_{j=l_1 \dots 1} \log^+ Q^i(\|N_{l_1}^i\| + \cdots + \|N_j^i\|) \right] < +\infty$$

In order to prove (6.2.9), we still have to show that, for every i , the positive part of $\max_{j=1 \dots l_1} \alpha^i(A_{l_1} \cdots A_j)$ is integrable.

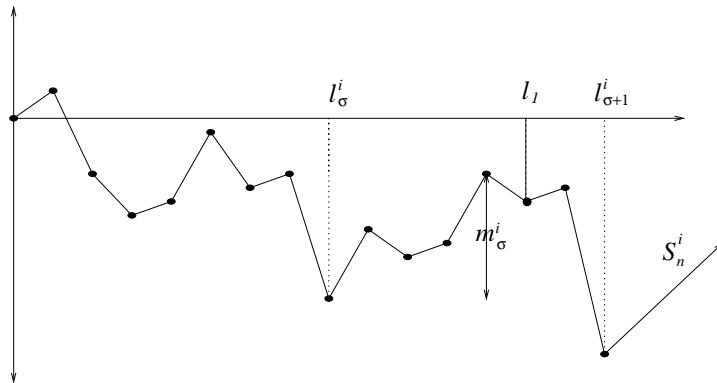
Set $S_n^i = \alpha_n^i + \cdots + \alpha_1^i$. By definition of the ladder time l_1 , for all $j = 1 \dots l_1$ we have

$$\alpha^{i_0}(A_{l_1} \cdots A_j) = S_{l_1}^{i_0} - S_{j-1}^{i_0} < 0.$$

Let now analyze the behaviour of the contractive part. For every $i \neq i_0$, let l_n^i be the sequence of ladder times where S_n^i reaches its minima, then the random variables

$$m_n^i = \max_{l_n^i \leq h < l_{n+1}^i} \alpha_{l_n^i}^i + \cdots + \alpha_h^i,$$

that represent the maximum of the excursion between two minima, are independent and identically distributed.



If we denote by σ^i the number of minima of S_n^i before l_1 , then $S_{\sigma^i}^i$ is the last minimum and

$$\max_{j=1\dots l_1} \alpha^i(A_{l_1} \cdots A_j) = \max_{j=1\dots l_1} S_{l_1}^i - S_{j-1}^i = S_{l_1}^i - S_{\sigma^i}^i \leq m_{\sigma^i}^i \leq \max_{j=1\dots l_1} m_j^i$$

since $\sigma^i \leq l_1$. If we suppose that α_1^i has a moment of order $3 + \delta$ then classical results on real random walks ([KW56] Theorem 5) ensure that $\mathbb{E}[(m_j^i)^{2+\delta}] < +\infty$ so that we can apply Lemma 6.2.2 and conclude that

$$\mathbb{E} \left[\max_{j=1\dots l_1} \alpha^i(A_{l_1} \cdots A_j) \right] \leq \mathbb{E} \left[\max_{j=1\dots l_1} m_j^i \right] < +\infty$$

We have shown that $\max_{j=l_1\dots 1} \log^+ \|A_{l_1} \cdots A_j\|$ is integrable and in particular that

$$(6.2.10) \quad \mathbb{E}[\log^+ \|A_{l_1} \cdots A_1\|] < +\infty.$$

To achieve the proof it remains to show that the logarithm of the B component of L_{l_1} is integrable. We observe that

$$\begin{aligned} \log^+ |B_{0,l_1}| &= \log^+ \left| \sum_{j=1}^{l_1} A_{l_1} \cdots A_{j+1} B_j \right| \\ &\leq \log l_1 + \max_{j=l_1\dots 1} \log^+ \|A_{l_1} \cdots A_j\| + \max_{j=1\dots l_1} \log^+ |B_j| \end{aligned}$$

Thus using the fact that $\log l_1$ is integrable, applying (6.2.9) and once more Lemma 6.2.2, we conclude that $\mathbb{E}[\log^+(|B_{0,l_1}|)]$ is finite.

□

REMARK. When two or more eigenvalues are centred the recurrence of the process is strongly related to the dependence between the coordinates. For instance let consider the case where we have just two blocks, $A_n = \begin{bmatrix} A_n^1 & 0 \\ 0 & A_n^2 \end{bmatrix}$. If $A_n^1 = A_n^2$, the previous theorem directly prove that we have a locally contractive system. On the other side if $A_n^1 = (A_n^2)^{-1}$, we cannot have any kind of recurrence. In fact if we apply the theorem to the systems Y_n^i defined by the matrices $\begin{bmatrix} A_n^i & B_n^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ for $i = 1, 2$, the local contraction property says that when $Y_n = \begin{pmatrix} Y_n^1 \\ Y_n^2 \end{pmatrix}$ lies in a compact set both $\|A_n^1\|$ and $\|A_n^2\|$ go to zero, and this is impossible because $\|A_n^2\| \geq 1/\|(A_n^2)^{-1}\| = 1/\|A_n^1\|$.

It is still an open question to determine which sort of correlation hypothesis between the blocks we need to assume in order to have a recurrent or a transient process and in particular what happens if we have two independent blocks with centred eigenvalues.

6.3. NA groups

In this section we apply the previous results to study a Markov chain that lives in a more abstract group. We consider now a real Lie group $\mathcal{G} = \mathcal{A} \ltimes \mathcal{N}$ which is the semi-direct product of an Abelian Lie group \mathcal{A} isomorphic to \mathbb{R}^d acting on a nilpotent simply connected Lie group \mathcal{N} . If we denote by $a \cdot$ the action of the element a of \mathcal{A} on \mathcal{N} , then the product on \mathcal{G} is :

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 a_1 \cdot b_2)$$

Our main assumption on \mathcal{G} is that the action of \mathcal{A} on \mathcal{N} is contractive, i.e. that there exists an element a in \mathcal{A} such that

$$\forall b \in \mathcal{N}, a^k \cdot b \rightarrow 0 \text{ when } k \rightarrow +\infty.$$

We have also an action of \mathcal{G} on \mathcal{N} that is $g \cdot b = b(g) a(g) \cdot b$ where $a(g)$ and $b(g)$ are the projections of $g \in \mathcal{G}$ on \mathcal{A} and \mathcal{N} respectively.

We shall identify the group \mathcal{A} with its Lie algebra \mathfrak{A} . We recall that since \mathcal{N} is simply connected the exponential is a diffeomorphism between \mathcal{N} and its Lie algebra \mathfrak{N} and that for every $X \in \mathfrak{N}$

$$a \cdot \exp(X) = \exp(\text{Ad}(a)X)$$

where $\text{Ad}(a)$ is, with an abuse of notation, the differential of the application $a \cdot$ at the unity of \mathcal{N} .

It has been shown ([Éli82], Appendix A2) that it is possible to provide the algebra \mathfrak{N} with a norm $\|\cdot\|$ such that if we identify \mathcal{N} with \mathfrak{N} and set

$$\|\exp(X)\| = \|X\|$$

then it exists a polynomial function Q without constant term, such that for every $k \in \mathbb{N}$ and $b_1 \dots b_k \in \mathcal{N}$

$$\|b_1 \cdots b_k\| \leq Q(\|b_1\| + \cdots + \|b_k\|)$$

Let Δ be the set of the roots for the action Ad of \mathcal{A} on \mathfrak{N} . Then there is a decomposition

$$\mathfrak{N} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{N}_\alpha$$

where $\mathfrak{N}_\alpha = \{X \in \mathfrak{N} : \forall a \in \mathcal{A} \exists n \in \mathbb{N} (\text{Ad}(a) - e^{\alpha(a)}I)^n X = 0\}$. For every $X \in \mathfrak{N}$ we will denote by X^α the projection of X on \mathfrak{N}_α . If H is a vector of the Lie algebra \mathfrak{A} of \mathcal{A} , we set, with an abuse of notation, $\alpha(H) = \alpha(\exp(H))$, so that α will indicate both the homomorphism of \mathcal{A} and its correspondent linear form from the additive group of the Lie algebra on \mathbb{R} .

The fact that the action of \mathcal{A} is contracting implies that all roots are non zero and that their real parts belong to an open half space of the dual of the Lie algebra. For simplicity, we shall suppose that all the roots are real valued and we shall denote by \mathfrak{A}^- the negative Weyl chamber

$$\mathfrak{A}^- = \{H \in \mathfrak{A} : \alpha(H) < 0 \forall \alpha \in \Delta\}$$

An important example of such a group is given by the upper triangular matrices for d , with positive coefficients on the diagonal :

$$\mathcal{T}_+(d) = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} x^{11} & \cdots & x^{1d} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & x^{dd} \end{array} \right] \in \text{GL}(\mathbb{R}^d) \mid x^{ii} > 0 \text{ for } i = 0 \dots d \right\}.$$

Every matrix of this group may be written as

$$(6.3.1) \quad \left[\begin{array}{ccc} x^{11} & \cdots & x^{1d} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & x^{dd} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & \frac{x^{12}}{x^{22}} \cdots & \frac{x^{1d}}{x^{dd}} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{x^{d-1d}}{x^{dd}} \\ & & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} x^{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & x^{dd} \end{array} \right]$$

so that we may decompose $\mathcal{T}_+(d)$ as the semi-direct product of the Abelian group of diagonal matrices with positive coefficients

$$\mathcal{D}_+(d) = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} a^1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a^d \end{array} \right] \in \text{GL}(\mathbb{R}^d) \mid a^i > 0 \text{ for } i = 0 \dots d \right\}$$

acting by conjugation on the nilpotent group of triangular matrices with only ones as diagonal elements,

$$\mathcal{N}(d) = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} 1 & x^{12} \cdots & x^{1d} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & x^{d-1d} \\ & & 1 \end{array} \right] \in \text{GL}(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

The Lie algebra of this group is the nilpotent algebra of triangular matrices with zeros on the diagonal,

$$\mathfrak{N}(d) = \left\{ \left[\begin{array}{ccc} 0 & x^{12} \cdots & x^{1d} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & x^{d-1d} \\ & & 0 \end{array} \right] \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \right\}$$

To suppose that all the roots are real is equivalent to restrict to matrices with positive coefficient on the diagonal ; in this case, the roots are the homomorphisms :

$$(6.3.2) \quad \alpha_{ij} \left(\left[\begin{array}{ccc} a^1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a^d \end{array} \right] \right) = \log(a^i) - \log(a^j) \quad \text{for } i < j$$

and $\mathfrak{N}_{\alpha_{ij}}$ is the one-dimensional sub-space of $\mathfrak{N}(d)$ of the matrices where all the coefficients except the one in the i^{th} line and j^{th} column are zero.

Let $g_n = (a_n, b_n)$ be a sequence of \mathcal{G} -valued independent and identically distributed random variables, $L_n = g_n \cdots g_1$ the left random walk and

$$(6.3.3) \quad Y_n^y = L_n \cdot y = b(L_n(1, y))$$

the associated Markov chain obtained by the projection b of \mathcal{G} on \mathcal{N} . We observe that, as for an auto-regressive model, this process can be defined recursively by the equation

$$Y_n^y = b_n a_n \cdot Y_{n-1}^y \quad Y_0^y = y.$$

The goal of this section is to show that if the action of \mathcal{A} on \mathfrak{N} is centred in one “direction” and contractive on the others the Markov chain Y_n^y is a locally contractive process. Although the definition of this process is formally very closed to the process on a vector space we have treated in the previous section, we have to face the problem that \mathcal{N} is not an Abelian group. However we will see that, for our purpose, the process on the nilpotent group does not differ too much from a convenient auto-regressive model defined on the Lie algebra.

Since the exponential is surjective we are able to rise the random variables b_i on \mathcal{N} in a sequence of random vectors B_i on the Lie algebra \mathfrak{N} such that $b_i = \exp(B_i)$. Let now consider the auto-regressive process on \mathfrak{N} defined by

$$\tilde{Y}_n^Y = \text{Ad}(a_n)\tilde{Y}_{n-1}^Y + B_n \quad \tilde{Y}_0^Y = Y$$

We observe that the sequence of i.i.d. random transformations $(\text{Ad}(a_n), B_n)$ are of the type we studied in the previous section. Although the exponential is not a homomorphism and we can not directly deduce the behavior of the process Y_n^y on \mathcal{N} from \tilde{Y}_n^Y , we know that there is a sequence of random variables Z_n in $[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}]$ such that if $y = \exp(Y)$

$$\begin{aligned} Y_n^y &= b_n a_n \cdot b_{n-1} \cdots (a_n \cdots a_1) \cdot y \\ &= \exp(B_n) \exp(\text{Ad}(a_n)B_{n-1}) \cdots \exp(\text{Ad}(a_n \cdots a_1)Y) \\ &= \exp(B_n + \text{Ad}(a_n)B_{n-1} + \cdots + \text{Ad}(a_n) \cdots \text{Ad}(a_1)Y + Z_n) \\ &= \exp(\tilde{Y}_n^Y + Z_n). \end{aligned}$$

We will suppose that the auto-regressive process \tilde{Y}_n satisfies the condition of the previous section and in particular that only one of the logarithms of the eigenvalues of the matrix $\text{Ad}(a_1)$ is centred while the others are negative in mean. Thus, we assume

$$(6.3.4) \quad \exists \alpha_0 \in \Delta : \mathbb{E}[\alpha_0(a_1)] = 0 \text{ and } \mathbb{E}[\alpha(a_1)] < 0 \text{ for all } \alpha \neq \alpha_0$$

so that the vector $\mathbb{E}[\log a_1]$ belong to a wall of the Weyl chamber \mathfrak{A}^- .

As it appears from the next lemma, α_0 has to be taken among the extremal roots :

LEMMA 6.3.1. *Under the hypothesis (6.3.4)*

$$[\mathfrak{N}, \mathfrak{N}] \subseteq \bigoplus_{\alpha \neq \alpha_0} \mathfrak{N}_\alpha$$

PROOF. Let $X = \sum_{\alpha \in \Delta} X^\alpha$ and $Y = \sum_{\alpha \in \Delta} Y^\alpha$ be any two vectors of \mathfrak{N} then

$$[X, Y] = \sum_{\alpha, \beta \in \Delta} [X^\alpha, Y^\beta].$$

As it is known that $[X^\alpha, Y^\beta] \in \mathfrak{N}_{\alpha+\beta}$, we just need to show that $\alpha + \beta \neq \alpha_0$. First of all, as α_0 is not null, $2\alpha_0 \neq \alpha_0$. On the other hand, if either α or β are different from α_0 , we can not have $\alpha + \beta = \alpha_0$, since by the hypothesis (6.3.4)

$$\mathbb{E}[\alpha(a_1) + \beta(a_1)] < 0 = \mathbb{E}[\alpha_0(a_1)]$$

□

For our purpose this lemma has the crucial consequence that the projection of the variable Z_n on the sub-space \mathfrak{N}_{α_0} is zero, so that Y_n does not differ from its “commutative part”, \tilde{Y}_n , along the centred direction.

In order to prove the recurrence of the system we need also the following lemma that translates in the case of a nilpotent group a classical criterion of convergence for real series

LEMMA 6.3.2. *Let $\{x_n\}_n$ a sequence in \mathcal{N} such that*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \|x_n\|}{n} < 0$$

then the product $x_1 \cdots x_n$ converges to an element of \mathcal{N} .

PROOF. Set $y_n = x_1 \cdots x_n$ and denote by $\log : \mathcal{N} \rightarrow \mathfrak{N}$ the continuous inverse of the exponential, we will then prove that $\{\log y_n\}_n$ converges, or equivalently that it is a Cauchy sequence in $(\mathfrak{N}, \|\cdot\|)$. We first observe that $\{y_n\}_n$ (and therefore $\{\log y_n\}_n$) is contained in a compact set. Indeed

$$\|y_n\| \leq Q(\|x_1\| + \cdots + \|x_n\|) \leq C_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \right)^D + C_2 < +\infty$$

for some positive constants C_1, C_2 and D .

As the logarithm is uniformly continuous on every compact set K , for every $\varepsilon > 0$, it exists $\delta > 0$ such that for all $y \in K$

$$\|v\| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|\log y - \log yv\| \leq \varepsilon$$

Since there is $N \in \mathbb{N}$ such that for all $n > m \geq N$

$$\|y_m^{-1} y_n\| = \|x_{m+1} \cdots x_n\| \leq Q \left(\sum_{k=m+1}^n \|x_k\| \right) \leq \delta,$$

then for all $n > m \geq N$, $\|\log y_n - \log y_m\| \leq \varepsilon$, i.e. $\{\log y_n\}_n$ is a Cauchy sequence.

□

We are now able to prove

THEOREM 6.3.1. *Suppose that $(\text{Ad}(a_1), B_1)$ satisfies the moment and irreducibility hypotheses of Theorem 6.2.1 and that (6.3.4) is fulfilled. Then for every compact set K of \mathcal{N} :*

$$\limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Y_n^y \in K}} \frac{\log \|(Y_n^x)^{-1} Y_n^y\|}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} = \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Y_n^y \in K}} \frac{\log \|\text{Ad}(a_1 \cdots a_n)\|}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} < 0$$

\mathbb{P} -almost surely. Furthermore the set of accumulation points of Y_n^y is almost surely not empty, so that it is a locally contractive system.

PROOF. As \exp is a diffeomorphism between \mathcal{N} and \mathfrak{N} , for every compact set K the projection, \mathcal{K}^{α_0} , of $\exp(K)$ on \mathfrak{N}_{α_0} is still compact. On the other side

$$[Y_n \in K] \subseteq \left[(\tilde{Y}_n + Z_n)^{\alpha_0} \in \mathcal{K}^{\alpha_0} \right] = \left[(\tilde{Y}_n)^{\alpha_0} \in \mathcal{K}^{\alpha_0} \right]$$

because Z_n is contained in $\bigoplus_{\alpha \neq \alpha_0} \mathfrak{N}_\alpha$. As the process \tilde{Y}_n satisfies the hypothesis of Theorem 6.2.1, it has a local contraction properties when $(\tilde{Y}_n)^{\alpha_0} \in \mathcal{K}^{\alpha_0}$ (it is clear from the proof of this theorem (see (6.2.8)) that the only component that we need to have in a compact set is the one along the direction that in not globally contracted) so that

$$\limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Y_n^y \in K}} \frac{\log \|\text{Ad}(a_1 \cdots a_n)\|}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} \leq \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tilde{Y}_n^Y \in \mathcal{K}^{\alpha_0}}} \frac{\log \|\text{Ad}(a_1 \cdots a_n)\|}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} < 0$$

The proof of the recurrence property follows the same schema of the real case. Let l_n be the ladder times of $\alpha_0(a_1 \cdots a_n)$ and consider the increments $L_{l_{n+1}}^{l_n} := g_{l_{n+1}} \cdots g_{l_n+1}$ of the random walk L_{l_n} on \mathcal{G} .

We have seen (6.2.10) that $\log^+ \left\| \text{Ad} \left(a(L_{l_1}^{l_0} \cdots L_{l_n}^{l_{n-1}}) \right) \right\|$ is integrable and that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left\| \text{Ad} \left(a(L_{l_1}^{l_0} \cdots L_{l_n}^{l_{n-1}}) \right) \right\|}{n} < 0$$

Furthermore, using (6.2.9) and Lemma 6.2.2 we show that,

$$\mathbb{E}[\log^+ \|b(L_{l_1}^{l_0})\|] \leq \mathbb{E} \left[\log^+ Q \left(\sum_{j=1}^{l_1} \|\text{Ad}(a_{l_j} \cdots a_{j+1})\| \|B_j\| \right) \right] < +\infty$$

Then

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left\| a(L_{l_1}^{l_0} \cdots L_{l_n}^{l_{n-1}}) \cdot b(L_{l_n}^{l_{n-1}}) \right\|}{n} \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left\| \text{Ad} \left(a(L_{l_1}^{l_0} \cdots L_{l_n}^{l_{n-1}}) \right) \right\|}{n} + \frac{\log \left\| b(L_{l_n}^{l_{n-1}}) \right\|}{n} < 0 \end{aligned}$$

and, by the convergence criterion given in Lemma 6.3.2, the sequence

$$L_{l_1}^{l_0} \cdots L_{l_n}^{l_{n-1}} \cdot 1 = b(L_{l_1}^{l_0}) \left(a(L_{l_1}^{l_0}) \cdot b(L_{l_2}^{l_1}) \right) \cdots \left(a(L_{l_1}^{l_0} \cdots L_{l_n}^{l_{n-1}}) \cdot b(L_{l_n}^{l_{n-1}}) \right)$$

converges to a random element whose law is the unique invariant measure of $Y_{l_n}^y$. Then the sets of accumulation points of $Y_{l_n}^y$ and therefore of Y_n^y are not empty.

□

We conclude this section translating in the context of the upper triangular matrices the results of the last theorem. Let

$$T_n = \begin{bmatrix} t_n^{11} & \cdots & t_n^{1d} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & t_n^{dd} \end{bmatrix}$$

be a sequence of i.i.d. random matrices in $\mathcal{T}_+(d)$, and, for every $y \in \mathcal{N}(d)$ and $a \in \mathcal{D}_+(d)$, let Y_n^y and D_n the Markov chain in $\mathcal{N}(d)$ and in $\mathcal{D}_+(d)$ such that, according to the decomposition (6.3.1)

$$T_n \cdots T_1 y a = Y_n^y D_n a.$$

We observe that D_n is just the diagonal part of the product $T_n \cdots T_1$ and that $Y_n^y = Y_n^1 D_n y D_n^{-1}$.

If the closed group generated by support of T_1 is the whole group $\mathcal{T}_+(d)$, then all the homomorphisms (6.3.2) are involved and the condition (6.3.4) is equivalent to

$$(6.3.5) \quad \mathbb{E}[\log(t_1^{11})] < \mathbb{E}[\log(t_1^{22})] < \cdots < \mathbb{E}[\log(t_1^{d-1d-1})] = \mathbb{E}[\log(t_1^{dd})].$$

In the case where the support of T_1 charges a smaller sub-group we may have other possibilities. In this context, the irreducibility condition (6.2.3) becomes

$$(6.3.6) \quad \begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R} : \mathbb{P} \left[t_1^{d-1d-1} y + t_1^{d-1d} = t_1^{dd} y \right] &< 1 \\ \mathbb{P} \left[t_1^{d-1d-1} = t_1^{dd} \right] &< 1 \end{aligned}$$

COROLLARY 6.3.3. *Under the hypothesis (6.3.5) and (6.3.6) and the moment condition (6.2.7), Y_n^y is recurrent and*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left\| Y_n^y - Y_n^x \right\|}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} < 0 \quad \mathbb{P} - \text{almost surely}$$

$Y_n^y \in K$

for every compact set K of $\mathcal{N}(d)$ and every $x, y \in \mathcal{N}(d)$.

PROOF. Since $I - y^{-1}x$ is a nilpotent matrix and, by Theorem 6.3.1, the norm on the adjoint action of D_n on $\mathfrak{N}(d)$ (that is, in this case, the action by conjugation) goes to zero with a convenient speed, one has :

$$\begin{aligned} \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Y_n^y \in K}} \frac{\log \|Y_n^y - Y_n^x\|}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} &\leq \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Y_n^y \in K}} \frac{\log C \|I - (Y_n^y)^{-1} Y_n^x\|}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} \\ &= \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ Y_n^y \in K}} \frac{\log \|D_n(I - y^{-1}x)D_n^{-1}\|}{\sqrt{\frac{n}{\log \log n}}} \\ &< 0. \end{aligned}$$

where $C = \max_{u \in K} \|u\|$.

□

6.4. Appendix : Decreasing random walk

In this appendix we will come back to the case where the linear part of the auto-regressive model is a real number and study in more detail the random walks on the affine group that are strongly contractive. We will give a proof of Lemma 6.1.3 in the following proposition

PROPOSITION 6.4.1. *Let $\{(a_n, B_n)\}_n \subset \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ be a sequence of independent identically distributed random variables such that the irreducibility hypothesis (6.1.1) holds and that $\log^+ |B_1|$ and $|\log a_1|$ are integrable. Furthermore suppose that*

$$\mathbb{E}[\log a_1] < 0.$$

Let $Y_n^y = a_n Y_{n-1}^y + B_n$ be the induced process on \mathbb{R}^d and $\bar{\nu}$ its invariant probability measure. Let K be a subset of \mathbb{R}^d such that $\bar{\nu}(K) > 0$ and denote by $\bar{\nu}_K$ the normalized restriction of $\bar{\nu}$ to K .

If $t_n^K = t_n^{y,K}$ is the sequence of entrance times of Y_n^y in K then :

- (1) *If the starting point y is distributed as $\bar{\nu}_K$:*

$$\mathbb{E}_{\bar{\nu}_K} [t_1^K] = \frac{1}{\bar{\nu}(K)} \text{ and } \mathbb{E}_{\bar{\nu}_K} [S_{t_1^K}] = \frac{\mathbb{E}[\log a_1]}{\bar{\nu}(K)}$$

- (2) *There exists a compact set K_0 such that for every $K \supseteq K_0$ and every compact set C there is a positive constant M such that for all $x \in C$:*

$$\mathbb{E}_x [t_1^K] < M \text{ and } \mathbb{E}_x [S_{t_1^K}] > M\mathbb{E}[\log a_1]$$

PROOF. 1. The Markov chain Y_n^y has a unique invariant probability measure $\bar{\nu}$ and it is ergodic. Then by the ergodic theorem :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n 1_K(Y_n^{y_0})}{n} = \bar{\nu}(K) \quad \mathbb{P}_{\bar{\nu}} - \text{almost surely.}$$

Since $\sum_{k=1}^{t_n^K} 1_K(Y_n^y) = n$ we have

$$(6.4.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n^K}{n} = \frac{1}{\bar{\nu}(K)} \quad \mathbb{P}_{\bar{\nu}} - \text{almost surely.}$$

On the other hand $Y_{t_n^K}^y$ is a Markov chain on K with invariant probability measure $\bar{\nu}_K$, so that under the distribution $\mathbb{P}_{\bar{\nu}_K}$ the sequence of positive real random variables $\{t_n^K - t_{n-1}^K\}_n$ is stationary. Then applying once more the ergodic theorem we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n^K}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n t_k^K - t_{k-1}^K}{n} = \mathbb{E}_{\bar{\nu}_K} [t_1^K | \mathcal{I}] \quad \mathbb{P}_{\bar{\nu}_K} - \text{almost surely}$$

where \mathcal{I} is the invariant σ -algebra for the shift on the sequence $\{t_n^K - t_{n-1}^K\}_n$. As $\mathbb{P}_{\bar{\nu}_K}$ is absolutely continuous with respect to $\mathbb{P}_{\bar{\nu}}$ the last two equations imply that $\mathbb{E}_{\bar{\nu}_K} [t_1^K | \mathcal{I}]$ is $\mathbb{P}_{\bar{\nu}_K}$ -almost surely constant and

$$\mathbb{E}_{\bar{\nu}_K} [t_1^K] = \frac{1}{\bar{\nu}(K)} .$$

To obtain the mean of $S_{t_1^K}$ we observe that it is the sum of the real random variables $\log a_n$ and that t_1^K is a stopping time with respect to the filtration generated by the random variables (a_n, B_n) . We can apply the following classical result whose proof may be found in [Doo53] page 350 :

LEMMA 6.4.2. *Let $\{X_n\}_n$ be a sequence of integrable identically distributed real random variables adapted to the filtration $\{\mathcal{F}_n\}_n$ such that, for every n , X_n is independent from \mathcal{F}_{n-1} . Then if τ is an integrable stopping time one has*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\tau} X_k \right] = \mathbb{E}[\tau] \mathbb{E}[X_1]$$

2. To show the second result we extract from Y_n^y a sub-chain that is even more contractive and we compare the trajectories of this sub-chain with the trajectories starting from a generic point x .

Fix $\rho > 0$ and consider the sequence of stopping times

$$r_n = \inf\{k > r_{n-1} : S_k - S_{r_{n-1}} < -\rho\} \quad r_0 = 0$$

We shall first show that the process $Y_{r_n}^y$ is recurrent. Observe that it is an autoregressive process on \mathbb{R}^d induced by the left random walk L_{r_n} on $\text{Aff}(\mathbb{R})$. Thus

it suffices to show that its step law, that is the distribution of L_{r_1} , satisfies the moment conditions

$$\mathbb{E}[|\log a(L_{r_1})|] < +\infty \text{ and } \mathbb{E}[\log^+ |b(L_{r_1})|] < +\infty$$

Since $\mathbb{E}[S_1] < 0$ we have $\mathbb{E}[r_1] < +\infty$ and then, using Lemma 6.4.2,

$$\mathbb{E}[|\log a(L_{r_1})|] = \mathbb{E}[-S_{r_1}] < +\infty.$$

Furthermore :

$$\begin{aligned} |b(L_{r_1})| &= \left| \sum_{k=1}^{r_1} A_{r_1} \cdots A_{k+1} B_k \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{r_1} e^{S_{r_1} - S_k} B_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{r_1} |B_k| \quad \text{since } S_k \geq -\rho \text{ for } k < r_1 \text{ and } S_{r_1} < -\rho. \end{aligned}$$

Thus, by lemma 6.4.2, we deduce that $\mathbb{E}[\log^+ |b(L_{r_1})|]$ is finite, because it is smaller than $\log r_1 + \sum_{k=1}^{r_1} \log^+ |B_k|$. Thus the sub-chain $Y_{r_n}^y = L_{r_n} \cdot y$ of Y_n^y is recurrent and satisfies the property

$$|Y_{r_n}^y - Y_{r_n}^x| = e^{S_{r_n}} |y - x| \leq e^{-n\rho} |y - x|.$$

Let $\bar{\nu}^r$ be the unique invariant probability measure for $Y_{r_n}^y$. We now fix a compact set K' such that $\bar{\nu}^r(K') > 0$ and consider a compact set K such that $K \supseteq \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, K') \leq \varepsilon\}$ for some $\varepsilon \geq 0$.

We want now to show that for every fixed compact set C there exists a finite constant M such that $\mathbb{E}[t_1^{x,K}] \leq M$ for all starting point x in C . Let N be an integer number such that $e^{-\delta N} \sup_{x \in C, y \in K'} |x - y| < \varepsilon$, then for every $n \geq N$, $x \in C$ and $y \in K'$:

$$|Y_{r_n}^x - Y_{r_n}^y| \leq e^{-n\rho} |x - y| \leq \varepsilon.$$

Let $\bar{t}^{y,K'}$ be the N^{th} entrance time of $Y_{r_n}^y$ in K' . We observe that, if y is distributed as $\bar{\nu}_{K'}^r$ then $Y_{r_{\bar{t}^{y,K'}}}^x$ is in K because $\bar{t}^{y,K'} \geq N$ and $Y_{r_{\bar{t}^{y,K'}}}^y \in K'$; thus $t_1^{x,K} \leq r_{\bar{t}^{y,K'}}$. Applying the first part of this lemma to the Markov chain $Y_{r_n}^y$ eds to

$$\mathbb{E}_{\bar{\nu}_{K'}^r} [\bar{t}^{y,K'}] = \frac{N}{\bar{\nu}^r(K')} < +\infty.$$

Finally using Lemma 6.4.2 on the sequence of random variables $\{(r_{n+1} - r_n)\}_n$ and to the filtration $\mathcal{F}_{r_n} = \sigma((a_i, B_i), i \leq r_n)$, we conclude that

$$\mathbb{E}[t_1^{x,K}] \leq \mathbb{E}_{\nu_{K'}^r} [r_{\bar{t}^{y,K'}}] = \mathbb{E}[r_1] \mathbb{E}_{\nu_{K'}^r} [\bar{t}^{y,K'}] = \frac{N\mathbb{E}[r_1]}{\bar{\nu}^r(K')} < +\infty$$

The uniform integrability of $S_{t_1^x, \kappa}$ follows from this result and Lemma 6.4.2

□

Bibliographie

- [AD86] David Aldous and Persi Diaconis. Shuffling cards and stopping times. *Amer. Math. Monthly*, 93(5) :333–348, 1986.
- [BBC78] Paolo Baldi, Philippe Bougerol, and Pierre Crépel. Théorème central limite local sur les extensions compactes de \mathbf{r}^d . *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)*, 14(1) :99–111, 1978.
- [BBE97] Martine Babillot, Philippe Bougerol, and Laure Elie. The random difference equation $X_n = A_n X_{n-1} + B_n$ in the critical case. *Ann. Probab.*, 25(1) :478–493, 1997.
- [BCTFT01] Paolo Baldi, Enrico Casadio Tarabusi, and Alessandro Figà-Talamanca. Stable laws arising from hitting distributions of processes on homogeneous trees and the hyperbolic half-plane. *Pacific J. Math.*, 197(2), 2001.
- [Ben] Martin Benda. Contractive stochastic dynamical systems. (preprint).
- [BL85] Philippe Bougerol and Jean Lacroix. *Products of random matrices with applications to Schrödinger operators*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985.
- [BP92] Philippe Bougerol and Nico Picard. Strict stationarity of generalized autoregressive processes. *Ann. Probab.*, 20(4) :1714–1730, 1992.
- [Bre68] Leo Breiman. *Probability*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1968.
- [Bro] Sara Brofferio. How a centred random walk on the affine group goes to infinity. (preprint).
- [CDG87] F. R. K. Chung, Persi Diaconis, and R. L. Graham. Random walks arising in random number generation. *Ann. Probab.*, 15(3) :1148–1165, 1987.
- [Chu48] Kai Lai Chung. On the maximum partial sums of sequences of independent random variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 64 :205–233, 1948.
- [CKW94] D. I. Cartwright, V. A. Kaĭmanovich, and W. Woess. Random walks on the affine group of local fields and of homogeneous trees. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 44(4) :1243–1288, 1994.
- [Coh79] Joel E. Cohen. Ergodic theorems in demography. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 1(2) :275–295, 1979.
- [CS89] Donald I. Cartwright and P. M. Soardi. Convergence to ends for random walks on the automorphism group of a tree. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 107(3) :817–823, 1989.
- [DM61] E. B. Dynkin and M. B. Maljutov. Random walk on groups with a finite number of generators. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 137 :1042–1045, 1961.
- [Doo53] J. L. Doob. *Stochastic processes*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1953.
- [EB86] Robert F. Engle and Tim Bollerslev. Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric Rev.*, 5(1) :1–87, 1986. With comments and a reply by the authors.

- [Éli77] Laure Élie. Étude du renouvellement sur le groupe affine de la droite réelle. *Ann. Sci. Univ. Clermont Math.*, (15) :47–62, 1977.
- [Éli82] Laure Élie. Comportement asymptotique du noyau potentiel sur les groupes de Lie. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(2) :257–364, 1982.
- [FK60] H. Furstenberg and H. Kesten. Products of random matrices. *Ann. Math. Statist.*, 31 :457–469, 1960.
- [FS82] G. B. Folland and Elias M. Stein. *Hardy spaces on homogeneous groups*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1982.
- [GJT98] Yves Guivarc’h, Lizhen Ji, and J. C. Taylor. *Compactifications of symmetric spaces*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1998.
- [GKR77] Yves Guivarc’h, Michael Keane, and Bernard Roynette. *Marches aléatoires sur les groupes de Lie*. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 624.
- [GM00] Charles M. Goldie and Ross A. Maller. Stability of perpetuities. *Ann. Probab.*, 28(3) :1195–1218, 2000.
- [Gol91] Charles M. Goldie. Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. *Ann. Appl. Probab.*, 1(1) :126–166, 1991.
- [Gri74] A. K. Grincevičius. A central limit theorem for the group of linear transformations of the line. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 219 :23–26, 1974.
- [Gri75] A. K. Grincevičius. Limit theorem for products of random linear transformations of the line. *Litovsk. Mat. Sb.*, 15(4) :61–77, 241, 1975.
- [Gui73] Yves Guivarc’h. Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques. *Bull. Soc. Math. France*, 101 :333–379, 1973.
- [Gui80] Y. Guivarc’h. Théorèmes quotients pour les marches aléatoires. In *Conference on Random Walks (Kleebach, 1979) (French)*, pages 15–28, 3. Soc. Math. France, Paris, 1980.
- [Gui84] Yves Guivarc’h. Application d’un théorème limite local à la transience et à la récurrence de marches de Markov. In *Théorie du potentiel (Orsay, 1983)*, pages 301–332. Springer, Berlin, 1984.
- [Gui89] Françoise Guimier. Simplicité du spectre de Liapounoff d’un produit de matrices aléatoires sur un corps ultramétrique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 309(15) :885–888, 1989.
- [Igl74] Donald L. Iglehart. Random walks with negative drift conditioned to stay positive. *J. Appl. Probability*, 11 :742–751, 1974.
- [Kai92] Vadim A. Kaimanovich. Bi-harmonic functions on groups. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 314(4) :259–264, 1992.
- [Kes59] Harry Kesten. Symmetric random walks on groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 92 :336–354, 1959.
- [Kes73] Harry Kesten. Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta Math.*, 131 :207–248, 1973.
- [KW56] J. Kiefer and J. Wolfowitz. On the characteristics of the general queueing process, with applications to random walk. *Ann. Math. Statist.*, 27 :147–161, 1956.
- [Loo53] Lynn H. Loomis. *An introduction to abstract harmonic analysis*. D. Van Nostrand Company, Inc., Toronto-New York-London, 1953.

- [LP83] É. Le Page. Théorèmes de renouvellement pour les produits de matrices aléatoires. Équations aux différences aléatoires. In *Séminaires de probabilités Rennes 1983*, page 116. Univ. Rennes I, Rennes, 1983.
- [LPP97] Émile Le Page and Marc Peigné. A local limit theorem on the semi-direct product of \mathbb{R}^{*+} and \mathbb{R}^d . *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 33(2) :223–252, 1997.
- [MT93] S. P. Meyn and R. L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability*. Springer-Verlag London Ltd., London, 1993.
- [NQ82] Des F. Nicholls and Barry G. Quinn. *Random coefficient autoregressive models : an introduction*. Springer-Verlag, New York, 1982. Lecture Notes in Physics, 151.
- [Rau88] Albert Raugi. Un théorème de Choquet-Deny pour les groupes moyennables. *Probab. Theory Related Fields*, 77(4) :481–496, 1988.
- [Rev75] D. Revuz. *Markov chains*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1975. North-Holland Mathematical Library, Vol. 11.
- [Rud62] Walter Rudin. *Fourier analysis on groups*. Interscience Publishers (a division of John Wiley and Sons), New York-London, 1962.
- [Spi64] Frank Spitzer. *Principles of random walk*. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London, 1964.
- [Tit70] Jacques Tits. Sur le groupe des automorphismes d'un arbre. In *Essays on topology and related topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham)*, pages 188–211. Springer, New York, 1970.
- [Tut65] V. N. Tutubalin. Limit theorems for a product of random matrices. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 10 :19–32, 1965.
- [Tut71] V. N. Tutubalin. Multiwave wave guides and probability distributions on a symplectic group. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 16 :649–659, 1971.
- [Var94] N. Th. Varopoulos. Wiener-Hopf theory and nonunimodular groups. *J. Funct. Anal.*, 120(2) :467–483, 1994.
- [Ver79] Wim Vervaat. On a stochastic difference equation and a representation of nonnegative infinitely divisible random variables. *Adv. in Appl. Probab.*, 11(4) :750–783, 1979.
- [Woe95] Wolfgang Woess. The Martin boundary for harmonic functions on groups of automorphisms of a homogeneous tree. *Monatsh. Math.*, 120(1) :55–72, 1995.
- [Woe00] Wolfgang Woess. *Random walks on infinite graphs and groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [Yor97] Marc Yor, editor. *Exponential functionals and principal values related to Brownian motion*. Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, 1997. A collection of research papers.